# ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE MATERIAL GRANULAR, EN SISTEMA BIDIMENSIONAL, SOMETIDO A CIZALLE

Trabajo de graduación presentado a la Facultad de Ciencia, en cumplimiento parcial de los requisitos exigidos para optar al Título Profesional de Ingeniero Físico.

# UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE SANTIAGO - CHILE

2007

# ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE MATERIAL GRANULAR, EN SISTEMA BIDIMENSIONAL, SOMETIDO A CIZALLE

#### Nelson Esteban Sepúlveda Navarro

Este trabajo de Graduación fue elaborado bajo la supervisión del profesor guía Dr. Francisco Vivanco A., del Departamento de Física, y ha sido aprobado por los miembros de la Comisión Calificadora, de, candidato, Dr. Francisco Melo y Dr. Eugenio Hamm.

DIRECTOR

PROFESOR GUÍA

## AGRADECIMIENTOS

Quiero manifestar mi profundo agradecimiento, por las críticas, correcciones y permanente apoyo de quienes trabajan en el laboratorio de Física No Lineal, del departamento de Física, de la Universidad de Santiago de Chile. Especialmente a quien me brindara la oportunidad de ser participe del trabajo experimental en los medios granulares, el Director del departamento de Física y cabeza del laboratorio de Física No Lineal, Dr. Francisco Melo, y a mi profesor guía Dr. Francisco Vivanco A. de quienes recibí las críticas, consejos y comentarios, pilares para mi formación. Y en particular, agradecer la paciencia que han tenido en el desarrollo de este trabajo.

La más larga caminata, comienza con un solo paso...

(Proverbio Hindú)

# INDICE

| RESUMEN   |  | 1  |
|---|--|----|
| Capítulo 1 INT  | RODUCCIÓN  | 2  |
| 1.1   | Generalidades  | 2  |
| 1.2   | Frotamiento  | 5  |
| 1.3   | Esfuerzo y Deformación   | 8  |
| 1.4   | Viscosidad   | 10 |
| 1.5   | Flujos Granulares Parcialmente Fluidizados   | 11 |
| Capítulo 2 MA<br>2.1<br>2.2<br>2.2.<br>2.2.<br>2.3<br>2.4 | <ul> <li>TERIAL GRANULAR BAJO CIZALLE.</li> <li>Montaje Experimental</li> <li>Desarrollo Experimental</li> <li>1 Protocolo de Medición</li> <li>2 Stick Slip</li> <li>Fuerza de Fricción y Dilatancia</li> <li>Compactación</li> </ul> |    |
| Capítulo 3 CO   | NCLUSIONES   | 39 |
| BILIOGRAFÍA   |  | 42 |

#### Resumen

En un sistema rectangular conformado por granos cilíndricos, con diámetros entre 7 y 8 [mm]. Se estudió la dilatación y la fuerza de cizalle producto del desplazamiento de una de las paredes a velocidad constante.

El flujo granular, posee características que los distancian de poder ser descrito como un fluido ideal, además de poseer la característica de ser altamente disipativo producto de los choques entre las partículas. En la respuesta del sistema al aplicar la fuerza de cizalle, se observan múltiples fluctuaciones en la fuerza de corte que no son apreciadas en la dilatancia, estas fluctuaciones son producto del desplazamiento de las cadenas en el sistema, pero sin variaciones en la longitud vertical de las cadenas o líneas de compresión, lo que se traduce en una altura fija, es decir, no hay dilatación en ciertos intervalos del recorrido.

A raíz de la aplicación de un esfuerzo constante, se producen reiterados aumentos progresivos en la dilatación.

Se encontró que la fuerza promedio, es independiente de la velocidad a la cual se produce el cizallamiento y para el coeficiente de fricción dinámica, un valor de  $\mu_d = 0.291 \pm 0.004$ , con granos de 8 [mm] de diámetro.

A la menor velocidad del cizalle, se observa la presencia de *stick slip,* característico en estudios de medios granulares.

#### Capítulo 1

#### Introducción

Un medio granular puede ser definido como cualquier sistema formado por un conjunto de partículas sólidas individuales, independiente del tamaños de las partículas [1], estas, varían de acuerdo a su composición y forma. Su comportamiento dependerá no solo debido a la estructura del material, sino también, de las dimensiones del sistema en estudio ya sea este unidimensional, como en el caso de una cadena lineal de esferas, geometrías del tipo bidimensional, o casos tridimensionales.

#### 1.1 Generalidades

Los sistemas granulares, presentan grandes complicaciones al intentar describirlos debido a que tiene la propiedad, de comportarse en *fases intermedias*, se pueden comportar como un sólido en el caso de las dunas, o comportarse como un liquido al fluir en el vaciado de un silo, o propiamente como un gas, al ser fuertemente agitado.

La coexistencia de fases, es uno de las dificultades en la descripción de los medios granulares, es posible comenzar describiendo algunas propiedades o parámetros que se aplican a cuerpos sólidos, y que también es posible de aplicar en los sistemas granulares, ante su comportamiento, precisamente como un sólido.



**Figura 1.1.1**<sup>1</sup> Los granos tienen la propiedad de comportarse como sólido (pila de arena), liquido (puede fluir) o gaseoso (al ser agitado fuertemente).

Al aplicar fuerzas externas a un sólido, este ofrece cierta resistencia a cambiar su forma, el cambio dependerá del tipo de material constituyente, y del tipo de fuerza al que es sometido, pero, en realidad la deformación que se produzca en el material será causada, más por la fuerza por unidad de área (Tensión) que por la fuerza misma. La figura 1.1.2 a) muestra una tensión del tipo *compresión*, en donde las fuerzas por unidad de área están dirigidas al interior del cuerpo. Otro caso, es cuando las fuerzas actuantes son tangentes y anti paralelas a las caras de un sólido, entonces se habla de *Tensión de Cizalle*, figura 1.1.1 b), y en el caso que las fuerzas sean perpendicular a las caras y dirigidas hacia fuera, se hace referencia a *esfuerzo normal de tracción*, figura 1.1.1 c).

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> http://www.eurocosm.com/



**Figura 1.1.2** Fuerzas actuantes por unidad de área, bajo tensión de compresión a), bajo tensión de cizalle b), y con esfuerzos normales de tracción c).

Cuando sobre las caras de un cuerpo actúan tensiones del tipo cizalle, provoca una deformación  $\varepsilon$  en el sólido, dada por  $\varepsilon_s = \phi \approx \Delta x / \ell$ .



**Figura 1.1.3** Deformación por Cizalle producto de una fuerza tangencial en la placa inferior, sobre un cuerpo rectangular (Sistema Bidimensional).

Existe un rango para los cuerpos sólidos, en el cual siguen una relación lineal entre el esfuerzo aplicado y la deformación que experimentan, esta condición es la establecida por la llamada *Ley de Hooke*,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

En la cual los  $C_{ijkl}$  representan las constantes elásticas del material, esta ley se cumple para un cierto rango de deformaciones, cuando los cuerpos son sometidos a deformaciones mayores que un cierto *límite de proporcionalidad*, la relación deja de ser lineal. Y si aumenta aun más la tensión, se alcanza el *límite*  elástico de deformación, limite en el cual la deformación del cuerpo es permanente.

En el caso de aplicar un esfuerzos de cizalle sobre suelos, este ofrece cierta resistencia al corte, debido a la fricción interna, del material que conforma el terreno, a la viscosidad del suelo, y a la cohesión entre las partículas, al respecto destaca el trabajo frecuentemente citado en estudios de suelos, de Charles Augustine Coulomb, *Essay on the rules of Maximis and minimis applied to some problems of equilibrium related to architecture* [2].

#### 1.2 Frotamiento

El frotamiento entre partículas, fue estudiado desde el S. XV por Leonardo Da Vinci (manuscritos, 1495), observando que la interacción entre los granos es independiente de la superficie de contacto, y constituye la primera ley de frotamiento, otra de sus notas indica la existencia de un coeficiente constante de frotamiento, según Da Vinci este era de 0.25, con ello introduce también la segunda ley de frotamiento; *La fuerza de frotamiento, es proporcional a la fuerza normal de contacto* [3]. Posteriormente en 1773 Coulomb dicta una tercera ley de frotamiento; *El coeficiente de frotamiento es independiente de la velocidad de desplazamiento*.

De observaciones posteriores, Leonhard Euler (1748) distingue dos valores para los coeficientes de frotamiento, uno actuaba en el caso estático  $F_f \leq \mu_s F_N$ , donde  $\mu_s$  es el coeficiente de fricción o frotamiento estático,  $F_f$  es la fuerza de frotamiento y  $F_N$ es la fuerza normal de contacto, y otro valor de coeficiente frotamiento para el caso cinético. La fuerza de fricción estática es la responsable de impedir que el sistema salga de su estado de reposo. En el momento de producirse el movimiento del cuerpo, de forma inmediata la fuerza de fricción toma el valor  $F_f = \mu_k F_N$ , donde  $\mu_k$ es el coeficiente de frotamiento cinético y  $\mu_s > \mu_k$ .

La unión de las leyes de frotamiento permite a C. A. Coulomb, establecer una relación entre la fuerza de frotamiento tangencial  $F_t$  a las partículas y la velocidad tangencial  $v_t$  [3].



**Figura 1.2.1** La figura muestra gráficamente la ley de Coulomb, donde  $V_t$  es la velocidad tangencial de los contactos,  $F_f$  es la fuerza tangencial, y  $R_N$  es la fuerza normal de contacto.

Generalizando la ley de Coulomb, establece que dada una potencial superficie de falla, el esfuerzo de corte  $\tau$  que será capaz de resistir la capa de material, será proporcional al valor de la presión normal al plano  $\sigma$ .

$$\tau = \sigma \bullet \tan \phi \qquad (1.2.1)$$

Donde  $\tan \phi$ , es la constante de proporcionalidad definida por Coulomb como ángulo de fricción interna, en el caso clásico se cambia  $\mu = \tan \phi$  y queda el anteriormente llamado *coeficiente de fricción o frotamiento*  $\mu$ . Sin embargo, si la presión normal es nula  $\sigma = 0$ , de todas formas existe una cierta resistencia a la tensión de cizallamiento. A esta resistencia se llamo cohesión **c**. Los materiales granulares como arenas confinadas, o arcilla, presentan una característica mixta, es decir, ofrece resistencia al cizalle en ausencia de tensión normal y resiste el cizalle producto de la cohesión entre los granos, la generalización de la ley de Coulomb, se escribe como:

$$\tau = \mathbf{c} + \boldsymbol{\sigma} \bullet \tan \phi \qquad (1.2.2)$$

Experimentalmente hay algunos aspectos que se escapan a las respuestas que pueda dar solamente la ley de frotamiento de C. A. Coulomb.

¿El coeficiente de frotamiento depende del tiempo de contacto estacionario?.

¿El coeficiente de fricción dinámico depende de la velocidad de desplazamiento? [3].

### 1.3 Esfuerzo y Deformación

Al aplicar esfuerzos tangenciales sobre las caras de un cuerpo, este experimentara deformaciones, cuya evolución temporal dependerá de la magnitud del esfuerzo y de las propiedades del material. En el texto *Teoría de la Elasticidad*, de Landau and Lifshitz [4], se da una extensa discusión sobre las tensiones causantes de la deformación y sobre las deformaciones mismas.

La teoría de la Elasticidad, estudia la mecánica de los cuerpos sólidos considerados como medios continuos [4], uno de los parámetros utilizados en el estudio de cuerpos sólido-elásticos es el tensor de deformación, cuando actúan esfuerzos sobre él provocando pequeñas deformaciones. En los medios granulares, al aplicar una fuerza de corte se observara una resistencia al corte, hasta cierta tensión máxima que sea capaz de soportar el material. Alcanzada esta *tensión de ruptura*, se produce una *falla* en el medio granular que provoca el cizallamiento en el sistema, producto del desplazamiento de las capas donde esta actuando la fuerza tangencial a las caras. En la figura 1.3.1 se puede observar un esquema de las tensiones que actúan sobre una configuración bidimensional.



**Figura 1.3.1** En a) se observan las tensiones de presión y cizalle, las componentes normales a las caras  $\sigma$  (Presión), y las componentes tangenciales  $\tau$  (Cizalle). La figura b) muestra la aplicación de dos tensiones normales y dos tangenciales, y los correspondientes Cizalle y Tensión Normal efectivos.

En estudios de suelos y materiales a los cuales se le aplican fuerzas de corte, la descripción de los esfuerzos normales máximos y mínimos que admite el sistema, como la tensión de corte máximo, se describen gráficamente por medio del llamado *Círculo de Mohr* (Otto Mohr 1895), es posible obtener las ecuaciones para la tensión normal y tensión de cizalle del texto de R. M. Nedderman [1]. Por otra parte, la tensión de elongación sobre el eje x, es usualmente definida por [1]:

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\partial V_x}{\partial x}$$

Y en un sistema bidimensional se define la razón de la tensión de corte por:

$$\dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial x_y} + \frac{\partial v_y}{\partial x_x}$$

#### 1.4 Viscosidad

Desde un punto de vista Termodinámico, un proceso es reversible solamente si se realiza a una velocidad infinitamente pequeña, de tal forma que el equilibrio se logre en cada instante de tiempo [4]. En un flujo granular deben ocurrir procesos internos que *tiendan* a llevar el sistema al equilibrio, estos procesos producen que el movimiento sea irreversible, la forma de *volver* al equilibrio es mediante la transformación de la energía. Los flujos granulares no tiene un comportamiento como un fluido estándar, entre los granos hay una fuerte disipación producto del choque entre las partículas "temperatura granular", es la analogía mecánica con la disipación térmica que ocurre en los líquidos.

En el caso de fluidos estándar, gases, líquidos, aceites, el proceso de disipación ocurre por dos mecanismos, uno es la conducción irreversible de calor, y el otro esta relacionado con la velocidad finita que se alcance en el sistema [4], a estos procesos disipativos se les llama *procesos de fricción interna* o *viscosidad*  $\eta$ , y al comportamiento del sistema de almacenar y disipar energía, durante la transformación mecánica, se hace referencia como *comportamiento anelástico* o *viscoelástico* [5].

En un fluido viscoso *newtoniano*, la viscosidad  $\eta$  se relaciona con la tensión de corte, por:



**Figura 1.4.1** Fluido entre dos placas paralelas, la placa inferior se mueve a velocidad constante hacia la derecha, se observa la tensión de Corte o Cizalle, el gradiente de la velocidad y el efecto de la viscosidad en el fluido.

Para un fluido considerado como Newtoniano, la viscosidad es una constante, y el esfuerzo de cizalle es directamente proporcional a la velocidad de deformación del fluido.

## 1.5 Flujos Granulares Parcialmente Fluidizados

Al aplicar una fuerza de cizallamiento a un medio granular, se produce en este, una coexistencia de fases, una parte dinámica proporcional a la tensión de corte es la fase "liquida" y una parte "estática" independiente de la tensión, es la fase "sólida". La fase fluida aparece inmersa en la fase sólida [6, 7]. Un sistema se considera fluido, si dos partículas al interactuar pueden salir de su posición, o si su tiempo de contacto es muy breve, y se considera sólido si al colisionar dos partículas permanecen en contacto por un tiempo mayor al tiempo de colisión [8],

la similitud con los cambios de fase en sólidos, producto de la temperatura son apreciables, en nuestro caso estos cambios se producen debido a la condición de falla, debido a las tensiones actuantes en la dinámica del material granular.

Los cambios que se producen en la densidad de flujos granulares densos, son pequeños, solo del orden de un pequeño porcentaje [6]. Estos cambios en la densidad, juegan un rol importante en la dilatancia del sistema mientras se aplica la fuerza de corte. Al aplicar esta fuerza se produce el cambio de fase en el material al pasar del comportamiento como un sólido, a un material parcialmente fluidizado mientras actúa el cizalle. Este cambio es controlado mediante un parámetro de orden normalizado  $\tilde{\rho}$ . Es posible describir la transición entre fases, considerando el valor  $\tilde{\rho} = 0$  para fase líquida y  $\tilde{\rho} = 1$  para fase sólida [6, 7], un parámetro normalizado para estudiar el empaquetamiento o compactación en los medios granular en términos de la *cristalización*, es definido en Ref.[9] en relación a la fracción de empaquetamiento inicial  $\rho_0$  y final  $\rho_{\infty}$ , el parámetro esta dado por:

$$\tilde{\rho} = \frac{(\rho - \rho_0)}{(\rho_\infty - \rho_0)}, \quad \text{con } 0 \le \tilde{\rho} \le 1 \quad (1.5.1)$$

El empaquetamiento en sistemas verticales, se produce producto de *Tapping*<sup>2</sup> sucesivos, ver Ref.[9]. En el caso bidimensional con granos sobre placas paralelas, ante cizalles sucesivos en cada sentido, se produce una disminución en la capacidad de dilatarse del sistema, este *envejecimiento* se puede describir en

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Del Ingles: Golpecitos.

términos de la fracción de empaquetamiento  $\rho$ , definido como la razón entre el área ocupada por las partículas circulares, y la superficie total sobre la cual se encuentran distribuidas.

$$\rho = \frac{N(\pi R^2)}{L \bullet h} = \frac{N\pi D^2}{4(L \bullet h)}$$
(1.5.2)

Donde **N** es el total de partículas en la muestra, **R** y **D**, radio y diámetro de los granos respectivamente, **L** es el largo de las placas paralelas, y **h** es la distancia entre las placas.

Como se ha mencionado, el parámetro de orden es útil para describir el comportamiento del sistema durante la *transición de fase*. Uno de los problemas surge en las relaciones para las tensiones  $\sigma_{ij}$  [6], ya que para un régimen estático, la tensión de corte es determinada por las fuerzas aplicadas, pero, para un régimen granular fluido la tensión de corte es proporcional a la razón de la tensión de corte, entonces, esto lleva a plantear el tensor de tensiones como una suma de la parte hidrodinámica proporcional al flujo de la razón de tensión  $\tau_{ij}$ , y la parte independiente de la tensión de corte  $\sigma_{ij}^s$ , entonces el tensor de tensiones se puede escribir  $\sigma_{ij} = \eta \dot{r}_{ij} + \sigma_{ij}^s = \eta (\partial v_i / \partial x_i + \partial v_j / \partial x_i) + \sigma_{ij}^s$ . Donde  $\eta$  es el coeficiente de viscosidad,  $\sigma_{ij}^s = \tilde{\rho} \sigma_{ij}^0$  para  $i \neq j$ , y  $\sigma_{ii}^s = \sigma_{ii}^0$ . En un régimen estático  $\tilde{\rho} = 1 \implies \sigma_{ij}^s = \sigma_{ij}^0$ ,  $v_i = 0$ , en tanto que para un régimen granular fluidizado  $\tilde{\rho} = 0$  [6].

Este régimen de coexistencia entre fluido y sólido, es posible estudiar en un sistema bidimensional (Capitulo 2), el cual tiene un comportamiento sólido al se apretado entre las paredes, pero, ante esfuerzos de corte, comienza a fluir como si se tratase de un líquido. Se estudia las variaciones de la dilatancia producto del cizallamiento, y la compactación luego de cizalles sucesivos.

## Capítulo 2

## Material granular bajo Cizalle



**Figura 2.1.1** Montaje Experimental, granos cilíndricos en geometría bidimensional para el estudio de la dilatancia y cizalle<sup>3</sup>.

En este capitulo se expone el montaje y resultados obtenidos, con la configuración experimental, se muestra paralelamente las curvas de dilatación y las variaciones en la fuerza de cizalle.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Montaje ubicado en el Laboratorio de Física No Lineal, Departamento de Física, Universidad de Santiago de Chile. <u>http://nlplab.usach.cl/research\_granular.html</u>

#### 2.1 Montaje Experimental

El material granular, se conformó por cilindros de polímero, de 7 [mm] y 8 [mm] de diámetro, con 6 [mm] de alto, y masas de 0.26 [g] y 0.32 [g] respectivamente.

Los granos se ubicaron entre dos placas paralelas, estando la fuerza normal sobre la pared superior. Para lograr una rugosidad similar a la fricción entre los granos, a las paredes se adhirieron cadenas de semi-cilindros, con diámetros de 6, 7 y 8 [mm].



**Figura 2.1.2** Paredes del sistema experimental, con incorporación de rugosidad por medio de granos.

La pared inferior de la figura 2.1.2, por medio de un motor de paso, fue responsable de efectuar el cizallamiento entre los granos. La adquisición de datos, el control de la velocidad de corte y el desplazamiento de la placa, fue controlada a través desde un computador, con el software Labview 7.1.

La dilatación debido al cizallamiento, es solo de un par de milímetros para 5 capas de granos entres las placas, típicamente la dilación alcanzada fue de 3 a 4 [mm]. Con el objetivo de minimizar cualquier roce mecánico que pudiese afectar las medidas de la dilatancia o la fuerza de cizalle, se utilizo un sistema de *rodamientos de aire*, dispuestos en los eje perpendicular a las paredes y que permitieron la dilatación del sistema con roce despreciable, estos rodamientos se alimentaron por un sistema de mangueras con una bomba Dental Schultz NR-13.

Los granos utilizados son de material fotoelastico lo que permitió registrar imágenes de la interacción entre las partículas, por medio de los patrones de compresión (*cadenas de fuerza*).

Los parámetros que podían ser ajustados, fue el desplazamiento  $\Delta x$  de la placa en 50 [mm], la velocidad de deformación del sistema v, y la fuerza normal  $F_N$  aplicada sobre la pared superior. Los valores de la velocidad variaron entre 0.1 [*mm*/*s*] a 4.8 [*mm*/*s*], en tanto la fuerza normal vario entre 2 [N] a 8.5 [N].





**Figura 2.1.3** a) Esquema superior del montaje experimental, por medio del motor de paso se obtuvo el movimiento de la pared rugosa inferior a velocidad constante. b) mediante polarizadores se puede apreciar diversas cadenas de interacción entre los granos.

#### 2.2 Desarrollo Experimental

#### 2.2.1 Protocolo de Medición

Los parámetros de control que variaron en las experiencias fueron; la cantidad de partículas **N**, la fuerza normal  $F_N$  perpendicular a la pared superior, la proporción de granos de 7 [mm] y 8 [mm] presentes en la muestra, y la velocidad de corte. Para cada uno de los parámetros controlados, se obtuvieron las respectivas curvas de *Cizalle* y *Dilatancia*.

Las medidas de la dilatancia, se efectuaron con un sensor de posición inductivo Schaevitz eng 250 [MHz] S/N 8038. La fuerza de corte, se determino por la deflexión de dos láminas metálicas paralelas, que tiraban de la placa inferior desde el eje del motor, un esquema se aprecia en la figura 2.2.1.



**Figura 2.2.1** Vista superior del montaje experimental, la dilatancia es medida por un sensor se proximidad con respecto a la placa superior.

El desplazamiento horizontal para el cizalle fue de 50 [mm], la distancia vertical entre las placas, varió entre 5 y 7 diámetros de partículas, dependiendo del tamaño y la concentración de granos utilizada. Con respecto a la adquisición de datos, esta se fijó en 10000 muestras por milímetro, esto implica que por cada recorrido realizado por el carro se obtuvieron 500000 muestras.

Entre los granos, cada vez que se aplicó una fuerza de cizalle o se varió la fuerza normal, se inducían fuerzas en el sistema, las cuales, podían ser observadas, aún, cuando la presión en las paredes era retirada.



**Figura 2.2.2** Montaje experimental para 250 cilindros de 8 [mm] de diámetro, en figura a) no hay fuerza normal aplicada, en b) con 2 [N] de fuerza normal, con 5 [N] en c) y 8 [N] en d).

Al retirar la fuerza normal aplicada a la pared superior, permanecen cadenas remanentes de la interacción entre los granos, apreciable en 2.2.3, por ello, antes de cada medición los granos fueron desordenados de forma aleatoria, con el fin de que el sistema no presentara un *envejecimiento* inducido, al realizar nuevas observaciones, el sistema se desordenó por medio de pinzas, volviendo a una configuración del tipo figura 2.2.2 a).



Figura 2.2.3 Cadenas remanentes, luego de aplicar fuerzas normales al sistema y retirarlas.

Debido a la geometría de la celda en la cual se encontraban los granos, en ocasiones se produjo aumentos *imprevistos* de fuerza, al finalizar el desplazamiento de la pared, estos se debieron a aprietes de partículas en las esquinas de la placa inferior. La forma de corregir estos aumentos de fuerza al finalizar un recorrido, fue realizar un recorte en los datos de 5 [mm] al inicio del recorrido, y 5 [mm] al finalizar

En la figura 2.2.4 se muestran una curva típica de la fuerza de corte y de la dilatación del sistema durante el desplazamiento de la placa, con velocidad de 0.7 [mm/s], para 250 partículas de 8 [mm] de diámetro. En las graficas aparece de forma explicita los 5 [mm] al inicio y final del recorrido que no fueron considerados para el análisis de los datos.

En las curvas fue conveniente considerar un promediado de 500 puntos, de esta forma se realizo un suavizado para eliminar el ruido eléctrico de las graficas obtenidas, en b) se aprecia un acercamiento con el promediado.



**Figura 2.2.4** Los gráficos superior y central muestran curvas típicas de la Fuerza de Cizallamiento y Dilatancia respectivamente, en negro extremos no considerados, el grafico inferior muestra un detalle de la Fuerza de corte (rojo), sobrepuesta por un promediado de 500 puntos (negro).

De las figuras 2.2.4, se aprecia la marcada diferencia entre las mediciones realizadas de forma paralela, por un lado se observa una curva con marcadas fluctuaciones, correspondiente a la fuerza de corte, en tanto, la curva mas estable y escalonada corresponde a la de la dilatación entre los granos.

Con respecto al comportamiento del sistema, este es similar al cambio de fase que ocurre en los sólidos al alcanzar la temperatura de cambio de fase. En el montaje experimental, existe un estado inicial donde se comporta como una *barra* sólida sosteniendo las paredes. Al comenzar el cizallamiento, los granos comienzan a desplazarse análogamente como lo haría un fluido con cierta viscosidad.

Con la finalidad de estimar el perfil de velocidades entre los cilindros, fueron ubicados granos de PVC, entre los granos originales, del mismo diámetro que los cilindros en estudio 8 [mm], a una velocidad de 2.0 [mm/s]. Al desplazar la placa a la derecha, los granos inferiores se desplazan aproximadamente con la misma velocidad que lo hace la pared en contacto, a diferencia de los granos superiores vecinos a la pared fija, los cuales no tienen un desplazamiento considerable en relación a la placa misma. En las imágenes 2.2.5 es posible apreciar el comportamiento similar al de un fluido viscoso.



a)



**Figura 2.2.5** Cilindros de PVC con igual diámetro que los granos en estudio, 8 [mm], pared moviéndose a la derecha, a  $\nu = 2.0$  [mm/s].

Un primer estudio, en base a los datos obtenidos de la fuerza de cizallamiento, consistió en analizar la dependencia de la fuerza promedio de corte, con el rango de velocidades, entre 0.1 [mm/s] a 4.8 [mm/s], con fuerza normal constante de 5 [N].



**Figura 2.2.6** Para una fuerza normal de 5 [N], la fuerza de Cizalle promedio muestra independencia con respecto de la velocidad a la que se efectúa el corte (N=250, D=8 [mm]).

Del gráfico anterior se observa que para una fuerza normal constante, hay independencia entre la fuerza de corte promedio y la velocidad a la cual se efectúa el corte, similar a los resultados obtenidos por Géminard [10].

El estudio siguiente consistió en investigar la dependencia, entre la fuerza de corte promedio y la fuerza normal, se estudió la dependencia para tres velocidades 0.8 [mm/s], 2.4 [mm/s] y 4.0 [mm/s]. Se emplearon 250 partículas de 8 [mm], la fuerza normal varió entre 2.0 [N] a 8.5 [N].



Figura 2.2.7 Fuerza promedio de corte en función de la Fuerza Normal aplicada, para las velocidades 4.0 [mm/s], 2.4 [mm/s] y 0.8 [mm/s].

Al igual que otros trabajos, se realizaron varias medidas por razones estadísticas, con el fin de obtener un comportamiento promedio. Hubieron pequeñas variaciones en cada medición [9], pero, los datos finalmente expuestos son el resultado de promediar las mismas medidas al menos 5 veces con la repetición del mismo ensayo experimental.

Queda en evidencia que el sistema posee un comportamiento, que obedece la ley *de fricción de Coulomb*,

$$\tau_{xy} = \sigma_{yy}\mu + c \quad (1.2.2)$$

Donde la cohesión *c* es despreciable ante la fricción dinámica de los granos. Y el valor determinado experimentalmente para el coeficiente de fricción dinámico, para la velocidad de 0.8 [mm/s], es de  $\mu_d = 0.293 \pm 0.004$ , para 2.4 [mm/s], es de  $\mu_d = 0.294 \pm 0.004$  y para 4.0 [mm/s] de  $\mu_d = 0.286 \pm 0.004$ .

Con estos valores se obtiene que el promedio, del coeficiente de fricción cinética de los granos, es de  $\mu_d = 0.291 \pm 0.004$ .

#### 2.2.2 Stick Slip

La existencia de dos coeficientes de fricción, uno para el caso estático y otro para el caso dinámico, da cuenta de la existencia de procesos de intermitencia en la fuerza durante el cizalle [3]. En cada desplazamiento, se observan variaciones en la fuerza de fricción, en esta se ven subidas progresivas (*stick*) seguidas de bajadas repentinas (*slip*). Los *stick slip* son eventos clásicos en el estudio de material granular, con diferentes configuraciones experimentales; sistema Couette, objetos moviéndose a través de un medio granular, etc., estos eventos son apreciables a *bajas* velocidades, de pocos micrómetros por segundo [10,11,12], En la configuración experimental en estudio, las velocidades típicas de movimiento de la placa, fueron de cientos a miles de micrómetros por segundo, en nuestro caso se observa stick slip para la menor velocidad de desplazamiento del sistema, 100 [ $\mu$ m/s]. Los stick slip no poseen un comportamiento continuo a lo largo del desplazamiento, cambian en amplitud y duración, además hay regiones donde ellos no son detectados, una curva típica con granos de 8 [mm] de diámetro para la velocidad de 100 [ $\mu$ m/s] se muestra en la figura 2.2.8.



**Figura 2.2.8** Curva Típica de fuerza de cizalle, para granos de 8 [mm], a velocidad de 100 [ $\mu$ m/s], se aprecia la intermitencia de los stick slip, durante el recorrido de 50 [mm].

El esquema clásico para la descripción de los stick-slip, se puede ver en el trabajo de Radjai *et al* [12], también es posible observar un esquema similar, presentado por K. Nakano [13], considerando un bloque sólido que es tirado a velocidad constante v por un resorte de constante k. La relación para la elongación del resorte  $\delta x$ , entre la velocidad y la posición x(t) del bloque, es  $\delta x = vt - x(t)$ , el esquema clásico es mostrado en la figura siguiente.



**Figura 2.2.9** Esquema clásico sistema masa-resorte, para representar el fenómeno de stick-slip. Entonces la ecuación de movimiento se puede escribir:

$$k\delta x - F = m\ddot{x}$$

Siendo F en este caso, la fuerza de roce debido a la fricción dinámica del suelo con el bloque.

Ocurren dos fases durante el movimiento del bloque, primero la fuerza actuante es menor a la fuerza de fricción sobre el bloque (caso estático, fase stick), esta dada por un aumento progresivo de la fuerza, sin cambio en el desplazamiento del sistema. Cuando la fuerza con la cual es tirado el bloque, alcanza el valor de la fricción estática  $F = mg\mu_s$ , se inicia el desplazamiento de bloque, y la fuerza que contrarresta el movimiento, esta dada por la fricción dinámica (fase slip, en la configuración experimental).

Como anteriormente ha sido mencionado, se aprecia el fenómeno stick slip en la mayor parte de los sectores de la curva para una velocidad de 0.1 [mm/s].



**Figura 2.2.10** a) Stick-Slip a  $\nu = 0.1$  [mm/s], para 250 partículas D=7 [mm], b) 250 partículas D=8 [mm].

Los eventos observados son de duración variable desde menos de un segundo, hasta algunos segundos en otros casos.

A velocidades levemente mayores que 0.1 [mm/s], como 0.2 [mm/s] ó 0.3 [mm/s], solo en determinadas regiones de la curva de fuerza de corte, es posible

apreciar peak de subidas y descenso, pero no tienen la regularidad que si presentan los stick slip.

El fenómeno de stick-slip, se observa de forma intermitente, no hay un efecto apreciable sobre los patrones de stick slip, cuando se varía el número de capas.

## 2.3 Fuerza de Fricción y Dilatancia

En la fig. 2.3.1, se pueden observar la superposición de las curvas típicas de dilatancia y de fuerza de corte.



**Figura 2.3.1** Curvas características de la Fuerza de Cizallamiento y la Dilatación, N=250, D=8 [mm] y  $\nu = 0.1$  [mm/s].

Al observar las curvas de fuerza de cizalle y de dilatancia, resulta claro que las múltiples fluctuaciones en la fuerza a lo largo del desplazamiento, no están acompañadas por las mismas fluctuaciones en la dilatación. Cabe mencionar, que al producirse el cizalle, se producen múltiples *Cadenas de Fuerza*<sup>4</sup> que se desplazan a lo largo del sistema. Las fluctuaciones aparentemente son producto de las variaciones en las interacciones entre las partículas, reflejadas en los cambios de configuración de la red de contactos observada. La dilatación, aparece como el resultado de un crecimiento longitudinal de al menos una cadena. Si bien, son múltiples las cadenas que interactúan durante el desplazamiento, se ha observado que un apilamiento de material del tipo piramidal, es capaz de sostener las paredes verticalmente. Ahora, si una cadena es capaz de mantenerse a pesar de las fluctuaciones en la fuerza de corte introducidas por la deformación, entonces, sería posible explicar por que no se observan cambios en la dilatancia, a pesar, de las fluctuaciones evidentes en la fuerza de corte.



<sup>&</sup>lt;sup>4</sup> Las Cadenas de Fuerza, son líneas por las cuales se distribuye la tensión en un sistema granular. Estas se han podido estudiar por medio de configuraciones de granos fotoelasticos y polarizadores.



**Figura 2.3.2** N=250, D=8 [mm] y  $\nu = 0.1$  [mm/s], se observa evidentes fluctuaciones en la fuerza, pero sin cambios en la dilatancia del sistema.

Múltiples fluctuaciones aparecen en la fuerza de cizalle, como se puede observar en las graficas anteriores, estas son productos de la interacción entre la pared rugosa y los granos, y entre los mismos granos.

El hecho de que las fluctuaciones no sean apreciables en la dilatancia, se debe a que el avance de las cadenas de fuerza es por contacto, i.e., si una cadena se rompe por que los granos que la conforman se reacomodaron, existe la posibilidad, que antes del rompimiento ya estuviese en contacto con las paredes un apilamiento de granos, en otro lugar del sistema, y estos serán los responsables de sostener el sistema, entonces, la cadena que se *rompe* desaparece, y da lugar a la formación de una nueva cadena a lo largo del sistema, sin que se manifieste una variación longitudinal. Otra causa es que existen fluctuaciones locales en los vértices riel-placa, debido al reacomodo y/o apriete de un grano en el vértice, esto induce fluctuaciones en la fuerza de cizallamiento,

pero obviamente no hay variación alguna en la dilatancia, si él o los granos en el vértice, no están en contacto con granos vecinos.



**Figura 2.3.3** Grano en uno de los vértices, un solo grano puede causar fluctuaciones en la fuerza, si no esta en contacto directo con otros granos, no hay variación alguna en la dilatancia.

En 1885, Osbourne Reynolds, observó el cambio de volumen en material granular, producto de fuerzas tangenciales. La dilatancia es producto del desplazamiento de una capa de granos, sobre una capa anterior como *un todo*. Se produce un pequeño incremento en el volumen del sistema. En la figura 2.3.4 es posible observar un esquema del efecto de la dilatancia producto de una fuerza de cizallamiento.



**Figura 2.3.4** Debido a la dinámica granular, se observan un aumento progresivo de la dilatancia, producto del crecimiento de una o más cadenas, posteriormente un cambio brusco, debido al rompimiento de las cadenas en la fase de reacomodo. N=250, D=8 [mm] y v = 0.1 [mm/s].

Idealmente el aumento progresivo de la dilatancia está asociada con el cizalle. Posteriormente los granos se reacomodan produciendo un descenso brusco en el valor de la dilatancia. Este brusco reacomodo se produce al romperse una cadena de fuerza, se debe a que los granos que conformaban la o las líneas de tensión llenan los espacios vacíos. En la figura 2.3.4 se observa, que producto de una fuerza de corte constante, se produce la dilatación del sistema, hasta alcanzar un valor máximo de dilatancia, luego producto del reacomodo de los granos, se produce la caída brusca de la curva de dilatancia.



Figura 2.3.5 Caídas escalonadas producto del reacomodo de los granos o rompimiento de cadenas de fuerza.

En la figura 2.3.5 se advierte la influencia de la fuerza de corte sobre la dilatancia, cada rompimiento o acortamiento de una cadena, produce una disminución de la longitud entre las placas, y esta va acompañada de un *slip* en la fuerza, la placa continua su desplazamiento, se produce un aumento en la fuerza

producto del desplazamiento de los granos, hasta que rompe otra cadena y el sistema vuelve a ceder, esto produce los escalones de dilatancia, acompañado de los stick slip correspondientes para cada escalón.

#### 2.4 Compactación

En los medios granulares, la dilatación y la compactación son fenómenos que abarcan una parte importante, de los estudios desarrollados sobre este tipo de material, tanto para el transporte como para la conservación.

Los estudios generados en la industria, se desarrollan en términos de la compactación de los granos, a partir de disminuir los costos de manipulación por medio de incrementar la *fracción de empaquetamiento*  $\rho$  en los medios granulares.

$$\rho = \frac{N\pi D^2}{4(L \bullet h)} \tag{2.4.1}$$

Esta fracción de empaquetamiento, da cuenta de la razón entre el área ocupada por los granos, y el área total donde están confinados, de esta forma mientras mayor sea el valor de este parámetro, hay menos espacios sin ocupar en el sistema. Los sistemas granulares, ofrecen cierta *resistencia* a compactarse, los estudios sobre el tema dan cuenta, la complejidad de la lenta compactación dinámica [9], son diversos los modelos como esquemas experimentales para intentar describirlos por medio de una ley funcional. Las clásicas formas de inducir la compactación sobre sistemas granulares, es por medio de vibraciones, por medio de *tapping* (golpecitos reiterados) o por medio de cizallamiento.

La fracción de empaquetamiento en geometrías 3D, como en una estructura cúbica simple (sc) de lado **2r**, con esferas de radio **r** en los vértices es  $V_{esferas} / V_{total} = (4\pi r^3/3)/8r^3 = \pi/6 \approx 52.4$ , sobrepasa ligeramente una compactación del 50%, si el sistema posee las esferas como una estructura centrada en las caras (fcc) o hexagonal compacto (hcp), la fracción teórica de empaquetamiento es de  $\phi \approx 0.74$ . Para procesos con materiales granulares distribuidos aleatoriamente, se tiene como parámetro el *random close packing* (RPC), el empaquetamiento teórico máximo que es posible alcanzar producto de alguna dinámica de movimiento en un sistema granular, cuyo valor es de  $\phi \approx 0.64$  (Jaeger and Nagel 1992) y en el caso de geometrías en 2D, si se construye un apilamiento de granos, depositando grano a grano de forma aleatoria, se alcanza un valor máximo de 0.83 [3].



**Figura 2.4.1** El empaquetamiento de máxima eficiencia se produce cuando las esferas o granos poseen el mismo diámetro, formándose una red hexagonal compacta.

Se realizaron experimentos con 42 cizallamientos sucesivos. Se pudo observar que a partir del ciclo 20 aproximadamente se alcanza un máximo de empaquetamiento y posteriormente se producen oscilaciones en torno a cierta fracción, ligeramente menor que el máximo empaquetamiento.

Para 250 cilindros de 8 [mm] de diámetro a 0.8 [mm/s], fue de  $\phi \approx 0.6792$ , este valor es mayor que el RCP teórico, pero esto no es válido considerando que el RCP es para 3D. La máxima compactación es menor que el valor de empaquetamiento grano por grano 2D, al respecto se debe hacer una serie de consideraciones, primero hay rugosidad con las paredes y los diámetros de los cilindros adheridos a las paredes no tienen el mismo diámetro que los granos en estudio, aún, cuando las partículas adheridas corresponden a mitades de cilindros similares a los utilizados para el estudio.

Se estudio la relación entre la máxima fracción de empaquetamiento, y el porcentaje de granos de 7 [mm] presentes en la muestra. El conjunto de granos fue una mezcla de partículas de 7 y 8 [mm] de diámetro, es decir 0% corresponde solo a granos de 8 [mm], 50% corresponde a mitad de granos de 7 [mm] y la otra

mitad a granos de 8 [mm] y finalmente 100% corresponde a un régimen solo de granos de 7 [mm]. La cantidad total de partículas fue siempre 250 granos.



Figura 2.4.2 Máxima fracción de empaquetamiento en función del porcentaje de granos de 7 [mm].

Se observa un progresivo aumento de la máxima fracción de empaquetamiento, con el aumento porcentual de la cantidad de granos de 7 [mm], desde un régimen solo con granos de 8 [mm]  $\phi \approx 0.6792$ , hasta 100% de 7 [mm] con  $\phi \approx 0.7381$ .

# Capítulo 3

## Conclusiones

Se observó que los granos en estudio, tienen un comportamiento, que obedece la *ley de fricción de Coulomb*, con un valor de cohesión despreciable ante la fricción dinámica experimentada por los granos. El valor determinado para el coeficiente de fricción cinético, con granos de 8 [mm], es de  $\mu = 0.291 \pm 0.004$ .

Se encontró que la fuerza de cizalle promedio, es independiente de la velocidad de corte, para el rango de velocidades de 0.1 [mm/s] a 4.8 [mm/s], estas observaciones fueron advertidas en los experimentos de *Tardos et al.*: si al material le es permitido expandirse, la tensión de corte es independiente de la velocidad, en tanto que, si el material es confinado a un volumen fijo, se encuentra un incremento cuadrático de la tensión de corte con la velocidad del cizallamiento.

Se observo que el movimiento de los cilindros producto del cizalle, sigue un comportamiento similar al de un fluido viscoso, las partículas en contacto con la pared que se desplaza, mantienen una posición relativa constante respecto de la placa, moviéndose aproximadamente a la misma velocidad que la pared, en tanto las partículas en contacto con la pared superior fija, permanecen casi inmóviles ante el desplazamiento del flujo granular.

Para los granos de 7 [mm] y 8 [mm] sometidos a cizalle, se observó el fenómeno de stick slip, de manera intermitente, con eventos de duración menor a 1 segundo, hasta de algunos segundos. El fenómeno se detecto para la velocidad de 100 [ $\mu$ m/s], a velocidades relativamente mayores de 200 [ $\mu$ m/s] y 300 [ $\mu$ m/s], aparecen máximos y mínimos en la fuerza, producto del rompimiento y disminución, de cadenas de fuerza, pero sin la regularidad, ni claridad como a 100 [ $\mu$ m/s].

La dilatación del sistema se produce por el crecimiento progresivo de una o mas cadenas de fuerza, dejando en evidencia el efecto de dilatancia observado por O. Reynolds sobre suelos granulares, el máximo aumento longitudinal detectado es cercano a 4 [mm], el equivalente al radio de un grano, posteriormente se produce una caída brusca producto del reacomodo de los granos, debido a la ruptura de las cadenas que soportan el sistema.

El máximo valor alcanzado para la fracción de empaquetamiento, considerando 250 partículas de 8 [mm] de diámetro, es 0.6792. Este valor es cercano al RCP teórico  $\phi \approx 0.64$ , pero, considerando geometría 3D. En el caso del la configuración experimental, esta sujeto a condiciones en 2D, en este caso, si se construye un apilamiento de granos, depositando grano a grano de forma aleatoria, se alcanza un valor máximo de 0.83 superior al máximo valor observado

40

en nuestros experimentos. Pero, sin embargo es necesario tener en cuenta la rugosidad presente en las paredes del sistema, no es uniforme.

Al analizar el máximo empaquetamiento, con respecto al porcentaje de granos de 7 [mm], en un régimen mixto de diámetros 7 [mm] y 8 [mm], es casi constante el valor del empaquetamiento, cuando en esta configuración hay sobre el 50% con granos de 7 [mm]. Parece ser que ante una mezcla con tan pequeña diferencia entre los diámetros 1[mm], sobre el 50% de los granos de menor tamaño, la influencia es significativamente mayor, debido a la reducción de los espacios desocupados, aumentando la fracción de empaquetamiento y logrando un valor casi constante de compactación..

## Bibliografía

- [1] R. M. Nedderman, *Statics and Kinematics of Granular Materials* (Cambridge University Press, Cambridge, U.K.,1992).
- [2] Charles Augustine Coulomb, Memoir de Mathematique et de Physique, Vol.
   7. Academie des Sciences, L'Impremiere Royale, Paris, p.343. (1773)
- [3] Yacine Khidas, Étude Expérimentale du Frottement et des Rotations dans des Milieux Granulaires Modèles. Tesis de Grado, Doctorado en Física. Université de Rennes 1 (2001).
- [4] L. Landau and E. Lifshitz, *Teoría de la Elasticidad* (Ed. Reverte 1969).
- [5] Enciclopedic Dictionary of Physics. The MacMillan Company New York. (London 1962).
- [6] I. Aranson and L. Tsimring. Phys. Rev. E. 65, 061303 (2002).
- [7] D. Volfson, I. Aranson and L. Tsimring. Phys. Rev. E. 68, 021301 (2003).
- [8] D. Volfson, L. Tsimring and I. Aranson. Phys. Rev. Lett. 90, 254301 (2003).
- [9] G. Lumay and N. Vandewalle. Phys. Rev. Lett. 95, 028002 (2005).
- [10] J.C. Géminard, W. Losert and J. Gollub. Phys. Rev. E. 59, 5 (1999).
- [11] D. Volfson, L. Tsimring and I. Aranson. Phys. Rev. E. 69, 031302 (2004).

- [12] F. Radjai, P. Evesque, D. Bideau and S. Roux. Phys. Rev. E. 52, 5555 (1995).
- [13] K. Nakano, Two dimensionless parameters controlling the occurrence of stick-slip motion in a 1-DOF system with Coulomb friction. Tribology Letters, Vol. 24, Nº 2 Noviembre 2006.