

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FISICA



**MÉTODO DE IMPULSIONES PARA LA
DETERMINACIÓN DE MÓDULO ELÁSTICO**

ROMINA WALESKA MUÑOZ BUZETA

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**METODO DE IMPULSIONES PARA LA
DETERMINACIÓN DE MÓDULO ELÁSTICO**

ROMINA WALESKA MUÑOZ BUZETA

Profesor Guía: Dr. Francisco Melo H.

Profesores Comisión: Roberto Bernal

Enrique Cerda

Eugenio Hamm

TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO PROFESIONAL DE INGENIERO FÍSICO

SANTIAGO DE CHILE

MAYO DEL 2010

“MÉTODO DE IMPULSIONES PARA LA DETERMINACIÓN DE
MÓDULO ELÁSTICO”

Trabajo de Graduación presentado a la Facultad de Ciencia, en cumplimiento parcial de los requerimientos exigidos para optar al Título profesional de Ingeniero Físico.

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

SANTIAGO DE CHILE

MAYO 2010

“MÉTODO DE IMPULSIONES PARA LA DETERMINACIÓN DE
MÓDULO ELÁSTICO”

ROMINA WALESKA MUÑOZ BUZETA

Este trabajo de Graduación fue preparado bajo la supervisión del profesor guía Dr. Francisco Melo H., del Departamento de Física de la Universidad de Santiago de Chile y ha sido aprobado por los miembros de la comisión calificadora, del candidato

.....

Roberto Bernal.

.....

Enrique Cerda.

.....

Eugenio Hamm.

.....

Francisco Melo Hurtado

Profesor Guía

.....

Bernardo Carrasco Puentes

Director

Agradecimientos

Una parte fundamental tanto en mi vida como para la obtención de este título es mi familia. Gracias Papá, Mamá y hermanas por su apoyo en los momentos difíciles, su incondicional afecto y alentarme a seguir con mis estudios a pesar de las dificultades. A Mi pareja Vicente quien es mi pilar fundamental en estos momentos, no se que habría hecho sin su ayuda. Y por supuesto a mi hijo Martín quien me alienta a seguir superándome tanto en lo profesional como en lo personal, buscando darle siempre una mejor calidad de vida y afecto. HIJO TE AMO.

Una parte muy importante de mi formación en el área de la investigación, es mi participación en el laboratorio de Física No Lineal, agradezco especialmente a su encargado el Dr. Francisco Melo, por darme la oportunidad y confianza para integrar su laboratorio, y también a todos los integrantes de éste, por estar siempre dispuestos a colaborar. Agradezco en forma especial a mi compañero Francisco Santibañez quien me ha brindado gran ayuda en la elaboración de éste y otros trabajos, Franco Tapia por su colaboración en la mejora de algunas imágenes, al profesor Francisco Vivanco quien me salvó de perder información fundamental para éste trabajo y al profesor Leonardo Caballero quien me entrego sus conocimientos en el área química haciendo posible la elaboración de los films.

Y por último a todos mis compañeros y amigos de carrera quienes han hecho del paso por la universidad una experiencia inolvidable.

A todos Gracias.

Resumen

La protección superficial de materiales mediante recubrimientos cerámicos puede ser la solución de muchos problemas prácticos, especialmente cuando las condiciones de trabajo son especialmente adversas (temperaturas elevadas, ambientes químicamente agresivos, etc.).

La utilización industrial de los recubrimientos exige su caracterización mecánica previa, entre otras cuestiones para poder garantizar su efectividad protectora en condiciones de servicio.

Esta caracterización mecánica tiene como principal objetivo la determinación de algunas constantes elásticas, como por ejemplo, el Módulo de Young.

De ahí la importancia de generar nuevos métodos no invasivos, de simple implementación y con márgenes de error menores a los ya existentes que permitan calcular esta constante.

El procedimiento que se presentará está basado en la propagación de una onda solitaria por una cadena de esferas en contacto. La onda se reflejará en uno de los extremos cuyas propiedades elásticas pueden ser determinadas por medio de relaciones entre la amplitud de las ondas incidente y reflejada.

Estas ondas son de baja amplitud, generando desplazamientos del orden de los micrómetros, los que no sobrepasan el límite elástico de ninguno de los materiales. De esta forma el ensayo no es invasivo para la muestra, no necesita destruirla, ni siquiera deformarla macroscópicamente a diferencia de los ensayos de tracción o compresión comúnmente utilizados.

El objetivo principal es implementar esta nueva metodología y analizar los resultados obtenidos para diferentes metales cuyos módulos ya son conocidos. Una vez verificado el método se determinará el módulo elástico de un film de sol gel Zirconia.

Se compararán éstos resultados, con otros determinados por medio de indentación realizados en otros trabajos y con ensayos de flexión de una lámina de Sol gel Zirconia afirmada por sus extremos.

Índice general

1. Introducción.	5
1.1. Teoría de Elasticidad.	6
1.2. Ley constitutiva de la elasticidad lineal.	7
1.3. Determinación de constantes elásticas.	8
1.4. La teoría de Hertz.	14
1.5. Teoría de impacto normal entre dos cuerpos elásticos.	17
1.5.1. Hipótesis.	17
1.6. Colisiones Inelásticas.	18
1.7. Cadena unidimensional de esferas en contacto.	20
2. Material y Método.	24
2.1. Materiales.	25
2.1.1. Esferas de acero.	25
2.1.2. Sensores.	26
2.1.3. Muestras	29
2.1.4. Adquisición.	33
2.2. Método.	34
2.2.1. Fundamentos Teóricos, Método de Impulsiones.	34
2.3. Método Experimental.	40
2.3.1. Cadena Unidimensional de esferas en contacto.	40
2.3.2. Determinación de la constante de disipación η	41

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	1
2.3.3. Determinación de módulo de Young, Método de Impulsiones. . .	41
2.3.4. Determinación del módulo de Young, Método de flexión.	43
3. Resultados y Análisis.	45
3.1. Determinación de la constante de disipación η	46
3.2. Determinación del Módulo elástico de Metales, Método de Impulsiones.	50
3.2.1. Calibración del método para metales.	52
3.2.2. Determinación del Módulo elástico del Film Sol Gel Zirconia. . .	56
3.3. Determinación del Módulo elástico por Flexión.	60
3.4. Lámina sin sustrato, método de Impulsiones.	62
3.5. Variación del módulo de Young con el espesor de la lámina.	66
4. Conclusiones y Trabajos futuros.	69
4.1. Conclusiones.	70
4.2. Trabajos Futuros.	71
5. Conclusiones y Trabajos futuros	72

Índice de figuras

1.1. Esquema de los métodos de alargamiento y flexión.	9
1.2. Ensayos de compresión.	10
1.3. Ensayos de indentación.	12
1.4. Cadena de esferas en contacto.	20
2.1. Sensor esfera.	27
2.2. Sensor de pared.	28
2.3. Fabricación de lámina sin sustrato.	30
2.4. Medición del espesor del film.	32
2.5. Gráfica de intensidad para cálculo de a	32
2.6. Patrón de medida transformación pixel distancia.	33
2.7. Energías en una cadena unidimensional de esferas, simulaciones.	36
2.8. Montaje experimental para la determinación de η	41
2.9. Montaje experimental para la determinación de módulo de Young de metales.	42
2.10. Láminas de diferente espesor.	43
2.11. Montaje experimental Sol Gel Zirconia por método de flexión.	44
3.1. Disipación de fuerza en la cadena.	46
3.2. Determinación de eta	48
3.3. Simulación con y sin disipación.	49
3.4. Forma de onda en determinación del módulo elástico.	51
3.5. Simulación con y sin disipación.	53

3.6. Variacion de la razón F_2/F_1 con la fuerza incidente F_1	54
3.7. Sustrato con Film de Zirconia antes del test.	56
3.8. Variación de la razón F_2/F_1 con la onda incidente para sol gel zirconia.	57
3.9. Sustrato con Film de Zirconia despues del primer test.	57
3.10. Variación de la razón F_2/F_1 con la onda incidente para sol gel Zirconia.	58
3.11. Sustrato con Film de Zirconia despues del segundo test.	59
3.12. Datos experimentales para los ensayos de flexión.	60
3.13. Regresión lineal datos experimentales.	61
3.14. Variación de la razón F_2/F_1 con la onda incidente para acero AISI 310.	63
3.15. Cambio en el peak central cuando se ubica la lámina en el contacto.	64
3.16. Variación de F_2/F_1 para la lámina en el último contacto.	65
3.17. Razón entre las fuerzas para láminas de diferente espesor.	67
3.18. Variación del módulo de Young con el espesor.	68

Índice de cuadros

2.1. Propiedades esferas de acero.	25
2.2. Propiedades sensor esfera.	26
2.3. Propiedades sensor pared.	28
2.4. Propiedades de metales usados en las muestras.	29
2.5. Propiedades Sol Gel Zirconia.	31
2.6. Características Amplificador	34
2.7. Tamaño lámina delgada sin sustrato.	44
3.1. Constantes necesarias para determinar η	48
3.2. Módulo elástico de metales determinados con el método propuesto. . .	55
3.3. Módulo elástico de Sol gel Zirconia.	58
3.4. Ajuste de datos en método de flexión.	61
3.5. Modulo de Young de Sol Gel Zirconia determinado por flexión.	62

Capítulo 1

Introducción.

1.1. Teoría de Elasticidad.

La teoría de la elasticidad estudia la mecánica de los cuerpos sólidos, considerados como medios continuos. Bajo la acción de fuerzas aplicadas, los sólidos se deforman, es decir, cambian en forma y volumen, en mayor o menor grado. La propiedad mecánica de ciertos materiales de sufrir deformaciones reversibles cuando se encuentran sujetos a la acción de fuerzas exteriores y de recuperar la forma original si éstas fuerzas exteriores se eliminan, es lo que comúnmente llamamos elasticidad.

Las fuerzas externas que actúan en el cuerpo son descritas por medio del *tensor de tensiones*, donde cada componente σ_{ij} , indica la fuerza por unidad de área que se ejerce en una dirección determinada. El tensor de tensiones más utilizado es el de Cauchy cuya principal característica es ser simétrico.

Cuando éstas tensiones actúan hacen que el cuerpo se deforme, desplazando cada uno de los puntos del volumen una cierta distancia.

Éstas deformaciones también son descritas por medio de un tensor, el tensor de deformaciones donde cada componente ϵ_{ij} , esta relacionada con el desplazamiento que sufre un punto del sólido cuando sobre él actúa una fuerza externa. Éste tensor es por definición simétrico.

Pero no todos los cuerpos se deforman de igual manera ante tensiones determinadas. La relación que existe entre las fuerzas que aplicamos a un cuerpo y cuanto se deformará éste, es la denominada Ley constitutiva de elasticidad.

1.2. Ley constitutiva de la elasticidad lineal.

La ecuación constitutiva es aquella que relaciona variables termodinámicas y/o mecánicas de un sistema físico. Cada material o sustancia tiene una ecuación constitutiva específica, dicha relación sólo depende de la organización molecular interna. En el caso de la elasticidad la ecuación constitutiva nos dirá la relación que existe entre el tensor de tensiones y el de deformaciones.

Un caso especial de sólido elástico se presenta cuando esta ecuación constitutiva es lineal, que es lo que normalmente llamamos ley de Hooke.

La Ley de Hooke relaciona el tensor de tensiones y el de deformaciones por medio de otro tensor, el de elasticidad.

Éste tensor posee 81 componentes las cuales son reducidas a solo 21 debido a las simetrías del tensor de tensiones y de deformaciones. Si el material además es isotrópico, es decir las propiedades elásticas en todas las direcciones son equivalentes, se requieren solo dos constantes, y la ley de Hooke queda representada por:

$$\sigma_{ij} = \lambda \text{tr } \epsilon \delta_{ij} + 2 \mu \epsilon_{ij} \quad (1.1)$$

El subíndice i denota la dirección perpendicular al elemento de área que se analiza y el subíndice j la dirección en la cual se ejerce la fuerza o desplazamiento.

λ y μ son los coeficientes de Lamé, definidos en función de dos parámetros característicos del material, E módulo de Young y ν modulo de Poisson [7].

La relación entre ellos esta dada por

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1.2)$$

El módulo de Young denota el cambio de volumen que experimentará un cuerpo cuando se somete a un esfuerzo, mientras que el coeficiente o módulo de Poisson denota el cambio de forma por medio de la razón entre las deformaciones longitudinal y

transversal.

1.3. Determinación de constantes elásticas.

La determinación del tensor de elasticidad de un material es parte fundamental de la ingeniería. Por medio de él es posible conocer la respuesta elástica de un sólido frente a esfuerzos.

Tal como se dijo anteriormente, en el caso de los materiales lineales isótropos, este tensor queda definido encontrando solo dos constantes, el módulo de Young (E) y el módulo de Poisson (ν).

De ahí que la obtención de estos parámetros ha sido siempre un tema de desarrollo.

En general el módulo de Poisson no es una cantidad muy variable y para la mayoría de los metales es $\nu \approx 0,3$, en cambio el módulo de Young sufre grandes fluctuaciones, siendo una de las constantes elásticas más importantes de determinar.

Ya en el siglo *XIX* comenzaron a realizarse los primeros *ensayos de alargamiento y flexión*.

Los ensayos de alargamiento, consisten básicamente en colgar masas conocidas del extremo de una barra del material a estudiar. Las masas ejercen un esfuerzo sobre la sección transversal de la barra, lo que hará que ésta se alargue. Midiendo este alargamiento la determinación del desplazamiento δ queda dada por $\delta = \Delta L/L$. Como el esfuerzo generado corresponde al peso de la masa por unidad de sección, usando la relación $P = E\delta$, podemos conocer el módulo de Young del material.

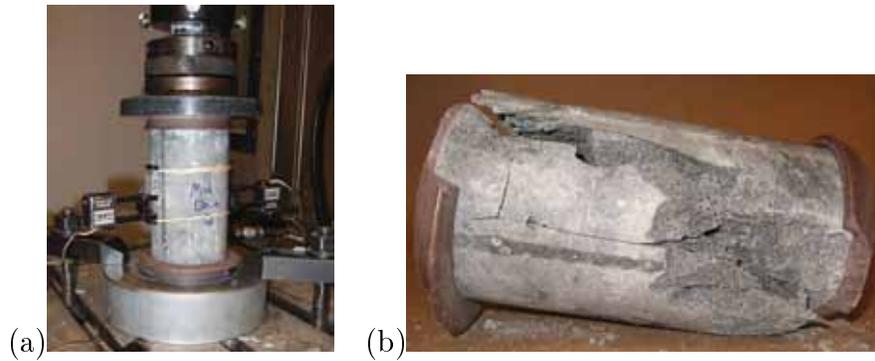


Figura 1.2: (a) Ensayo de compresión de una probeta cilíndrica de hormigón. (b) La probeta de material generalmente se rompe después del ensayo, tal como sucedió con la probeta de hormigón del ensayo anterior.

Pero no todos los ensayos terminan por destruir la muestra, también es posible medir módulo de Young vía ensayos no destructivos. Un ejemplo de éstos son *Los ensayos por ultrasonidos*.

Mediante la emisión y recepción de señales por medio de transductores, se puede determinar el tiempo de vuelo de una onda acústica dentro del material, haciendo posible el calculo de las velocidades de propagación transversal y longitudinal, las que se encuentran relacionadas con las constantes elásticas por medio de las siguientes expresiones [21]: $E = \frac{3\rho V_T^2(V_L^2 - 4/3V_T^2)}{(V_L^2 - V_T^2)}$, $\nu = \frac{(V_L^2 - 2V_T^2)}{2(V_L^2 - V_T^2)}$. Donde V_L es la velocidad longitudinal y V_T la transversal, determinadas como t_v/d con t_v el tiempo de vuelo para un transductor longitudinal y uno de cizalle respectivamente, mientras que d es el espesor de la muestra. Una de las restricciones del método, es que la longitud de la onda acústica que se propaga por el material debe ser mucho mayor que el espesor de éste, $\lambda \gg d$. Si bien existen transductores de muy altas frecuencias, con longitudes de ondas pequeñas, la medición del tiempo de vuelo y la manipulación de la lámina serían los dos grandes inconvenientes para usar este método en la caracterización de láminas delgadas. El tiempo de vuelo al ser tan corto podría caer dentro del error del instrumento usado para medirlo.

Aunque existen muchos métodos de medición, de tal forma que se pueda escoger el que más se adecúe a nuestras necesidades dependiendo de las características del material que queremos testear, nos encontramos con grandes dificultades cuando la muestra es única, de difícil obtención o fabricación y no podemos darnos el lujo de romperla y más aún cuando ésta es tan delgada que ni siquiera es posible realizar un ensayo ultrasónico.

Éste es el problema que ha generado la obtención de constantes elásticas en láminas delgadas o films, especialmente cerámicos, los que actualmente son usados en diversos campos de la ciencia e industria.

Pero estos inconvenientes no quieren decir que en estos momentos no exista un método para efectuar test mecánicos a láminas delgadas. Hasta el momento los más utilizados son los ensayos de flexión y los de indentación ya sea con impresores puntiagudos o esféricos.

Los ensayos de flexión son tan antiguos como los de alargamiento, y la principal diferencia radica en que en éstos últimos la barra se cuelga verticalmente desde uno de sus extremos y en los de flexión la barra se apoya horizontalmente, ya sea con uno o con sus dos extremos fijos.

En el caso de flexión de barras apoyadas en ambos extremos, es posible medir de la deflexión de la barra δ para diferentes cargas conocidas aplicadas en su centro. La Ec. que relaciona las variables experimentales con el módulo de Young es

$$F = \frac{\delta}{k} \quad (1.3)$$

Donde $k = L^3/E4ab^3$ con E el módulo de Young, L el largo de la barra, a el ancho y b el espesor. Que E dependa del espesor como b^3 , lo hace un método con un alto porcentaje de incertidumbre, debido a la dificultad de medir el espesor en láminas delgadas con gran exactitud. Aún así el método es válido siempre que se pueda manejar la deformación de la barra sin romperla.

En el caso de indentación, el procedimiento consiste básicamente en presionar un impresor contra la muestra y en función de la presión ejercida determinar cuanto se deforma el material. En recubrimientos, es necesario limitar la profundidad de penetración del impresor. Esta circunstancia exige que las cargas máximas aplicadas sean muy inferiores a las utilizadas en materiales masivos. Por ello, los durómetros ¹ tradicionales han sido reemplazados por equipos más sofisticados y altamente costosos, como ultramicrodurómetros y nanodurómetros que, además, permiten registrar la carga aplicada frente a la profundidad de penetración en el transcurso del ensayo. Estos ensayos suministran una valiosa información sobre la respuesta elástico-plástica de los materiales y resultan especialmente idóneos en el caso de los recubrimientos delgados.

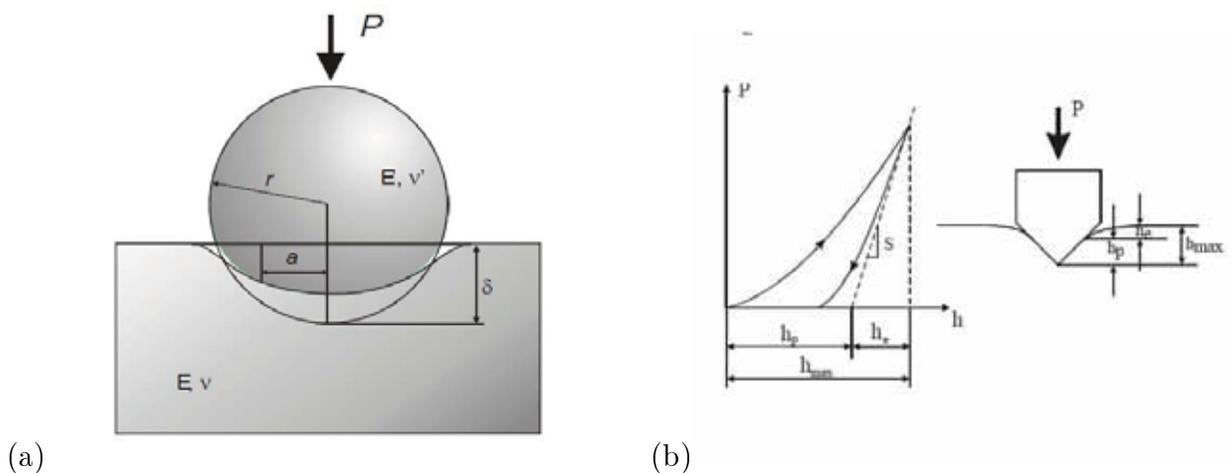


Figura 1.3: (a) Geometría de indentación por medio de un impresor esférico. (b) Geometría de la indentación con impresor puntiagudo de Bickers.

La relación entre las cantidades variables como la Presión ejercida (P) y

¹Un durómetro es un aparato que mide la dureza de los materiales, existiendo varios procedimientos para efectuar esta medición. Los más utilizados son los de Rockwell, Brinell, Vickers y Microvickers. Se aplica una fuerza normalizada sobre un elemento penetrador, también normalizado, que produce una huella sobre el material. En función del grado de profundidad o tamaño de la huella, obtendremos la dureza.

profundidad de penetración (δ) con el Módulo de Young en el caso de impresores esféricos es :

$$P^{2/3} = E^* \delta \quad (1.4)$$

Ésta ecuación está basada en el modelo de contacto de Hertz entre una esfera y un plano, donde $1/E^* = (1 - \nu^2)/E + (1 - \nu'^2)/E'$ contiene las constantes elásticas del impresor y del material.

Para el caso de impresores puntiagudos [1]

$$E = \frac{1}{2} S \left(\frac{\pi}{A_p} \right)^{1/2} \quad (1.5)$$

Donde $A_p = 3^{3/2} h_p^2 \tan^2 \theta$ con θ el ángulo del impresor y las constantes h_p y S se obtienen de la curva de carga y descarga del material como muestra la Fig.(1.3(b)).

La indentación por impresores puntiagudos, tiene la desventaja de que el módulo de Young, depende de parámetros obtenidos a partir de un análisis de las curvas de carga y descarga del material, mientras que en el ensayo de Hertz solo es necesario conocer los parámetros involucrados en el experimento, y mediante un análisis simple de la recta $P^{2/3}v/s\delta$ es posible obtener la pendiente E^* .

Sin embargo, el principal inconveniente de los ensayos de indentación radica en que una de las variables a medir es la deformación δ , la que no es fácil de determinar y posee grandes fluctuaciones entre ensayos similares.

El lograr realizar un test basado en el contacto de Hertz, pero que se desligue de la deformación como parámetro a medir, traería consigo todos los beneficios de la mecánica de contacto, la que permite entre otras cosas , generar pequeñas deformaciones confinadas al área de contacto entre los cuerpos. Éstas deformaciones aparte de ser localizadas, alcanzan sólo algunos micrones, haciendo posible la determinación del Módulo de Young sin necesidad de romper la lámina.

1.4. La teoría de Hertz.

En el año 1880 Hertz estableció la teoría de contacto elástico entre dos cuerpos sólidos. Resolviendo las ecuaciones de la elasticidad lineal llegó a enunciar la denominada ley de contacto de Hertz, la que relaciona la fuerza ejercida en el contacto entre dos cuerpos con la deformación entre ellos por medio de una potencia no lineal $F \propto \delta^{3/2}$.

Partiendo de la ecuación de superficie de cada cuerpo cerca de su punto de contacto, Hertz escribe dos relaciones entre la distribución de la presión de contacto y cada componente normal de desplazamiento de las dos superficies bajo la acción de la presión. En combinación de estas dos relaciones, Hertz observa una analogía entre la relación integral obtenida y la expresión para un potencial de una distribución de cargas uniformes en el interior de un elipsoide fuertemente aplanado. Esta analogía con un problema de electrostática le permite determinar la distribución de presiones en el interior de la superficie de contacto y concluye que ésta superficie está delimitada por una elipse.

Cuando dos cuerpos son comprimidos de forma estática, la teoría de Hertz, permite bajo ciertas condiciones, determinar las dimensiones del área de contacto, la distribución de tensiones y la de deformaciones en la zona de contacto entre los dos cuerpos. Los resultados arrojan una dependencia de la presión con la geometría de los sólidos y las constantes de elasticidad E y ν .

Las condiciones que deben cumplir los cuerpos que están siendo comprimidos son las siguientes:

- Las superficies se suponen sin fricción, de manera que la presión normal se transmita entre sus superficies durante la compresión. De esta forma las superficies deben ser lisas y no poseer irregularidades que causen una discontinuidad en el contacto.
- Las dimensiones del área de contacto deben ser significativamente más pequeñas que las dimensiones de los cuerpos.

- Y por último, con el fin de que las deformaciones sean sólo locales, cada cuerpo debe considerarse como un medio semi-infinito en comparación con el área de contacto.

La relación entre fuerza y deformación resulta ser independiente de la forma de los cuerpos, es decir, el resultado es el mismo para el contacto entre dos esferas que para el contacto entre una esfera y un plano [7].

Contacto esfera-esfera.

El resultado exacto al que llegó Hertz para la fuerza de contacto entre dos esferas de radios R y R' es [8]

$$F = \kappa \delta^{3/2} \quad (1.6)$$

Donde κ es una constante que depende del radio de las esferas y de sus constantes elásticas de la forma

$$\kappa^{-1} = (\theta + \theta') \sqrt{\frac{1}{R_{eq}}} \quad (1.7)$$

Donde $\theta = \frac{3(1-\nu^2)}{4E}$ y $1/R_{eq} = (1/R + 1/R')$.

El área de contacto entre las dos esferas corresponde a un círculo cuyo radio es [8]

$$a = \left(\frac{F}{\kappa}\right)^{1/3} \sqrt{R_{eq}} \quad (1.8)$$

La presión, o stress, al ser definida F/A , puede calcularse como

$$P = \frac{\kappa^{2/3}}{\pi R_{eq}} F^{1/3} \quad (1.9)$$

Contacto esfera-plano.

Como la ley de Hertz citada en la Ec.(1.6) es válida independientemente de la geometría de los cuerpos en contacto, para el caso de un contacto esfera plano, solo debemos considerar la curvatura del plano como $R \rightarrow \infty$. De esta forma el factor κ se transforma en

$$\kappa^{-1} = (\theta + \theta')\sqrt{R^{-1}} \quad (1.10)$$

El área de contacto es nuevamente un círculo de radio

$$a = \left(\frac{F}{\kappa}\right)^{1/3} \sqrt{1/R} \quad (1.11)$$

La presión puede calcularse como

$$P = \frac{\kappa^{2/3}R}{\pi} F^{1/3} \quad (1.12)$$

Energía Potencial de contacto.

Como sabemos la energía potencial puede definirse sólo cuando el campo de fuerzas que está actuando es conservativo. En este caso se cumple que

$$U_H = \int F_H d\delta$$

De esta forma el potencial de contacto de Hertz queda definido como

$$U_H = \frac{2}{5}\kappa\delta^{5/2} \quad (1.13)$$

Escribiendo la expresión anterior en función de la fuerza de contacto

$$U_H = \frac{2}{5}\delta F \quad (1.14)$$

1.5. Teoría de impacto normal entre dos cuerpos elásticos.

La teoría de impacto normal, es la extensión de la teoría estática de contacto elástico presentada anteriormente, cuando ambos cuerpos se comprimen y luego descomprimen a una determinada velocidad.

El evento dinámico debe ser considerado como cuasiestático y no debe superar el régimen elástico de ninguno de los materiales para que los beneficios del contacto de Hertz sean aplicables a un contacto dinámico.

Ésta teoría no considera las disipaciones de energía ocurridas en el impacto. Sin embargo más adelante abordaremos los distintos mecanismos de disipación, los que son necesarios de considerar en un modelo realista. Generalmente la colisión binaria de Hertz es descrita como una colisión entre dos cuerpos perfectamente rígidos, dotados en la parte frontal por un resorte que aporta la parte deformable del sistema, mientras que la indeformable (cuerpo rígido) se mueve a la velocidad de su centro de masa [9].

1.5.1. Hipótesis.

El límite cuasi-estático impone que tanto la fuerza F como la distancia de acercamiento entre los centros δ sean funciones que varían lentamente en el tiempo. Éstas variaciones son consideradas como lentas cuando todas las escalas típicas envueltas en el movimiento son mucho mayores que el tiempo que se demora una onda elástica que viaja a la velocidad del sonido en el material c_0 en atravesar una distancia igual al diámetro de una esfera. Esta condición es resumida en la condición de Love [12], para el caso de dos esferas, y en la condición de Hunter [13], para el caso de una esfera y un plano. En resumen ambas dictan que la velocidad de impacto entre los cuerpos debe ser mucho menor que la velocidad de propagación del sonido en el material de los cuerpos

$$v_i \ll c_0 \quad (1.15)$$

En la práctica, los materiales dejan de deformarse elásticamente si la presión máxima en el contacto supera un determinado límite (σ_Y), el cual es una propiedad intrínseca del material con el cual se está trabajando. Éste límite tiene por consiguiente una velocidad de impacto crítica asociada (v_c), por sobre la cual el material se comportará, en la mayoría de los casos, de forma elasto-plástica. Ésta velocidad de impacto puede ser calculada a través de la conservación de la energía, ya que la esfera que impactará a la siguiente posee solo energía cinética la que al entrar en contacto será transformada en energía potencial de contacto.

$$\begin{aligned} E_c &= U_H \\ \frac{1}{2}mv_c^2 &= \frac{2}{5}\kappa\delta_c^{5/2} \\ v_c &= \sqrt{\frac{4}{5}\frac{\kappa}{m}\delta_c^{5/2}} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Donde δ_c es la deformación correspondiente a σ_Y .

1.6. Colisiones Inelásticas.

La teoría de impacto de Hertz no considera disipaciones de ningún tipo, Pero en la práctica parte de la energía se pierde debido a fenómenos de diferente naturaleza. Esta energía de disipación puede ser cuantificada por medio del coeficiente de restitución, el que nos indicará la razón entre las velocidades antes y después de un choque:

$$e = \frac{v_f}{v_i} \quad (1.17)$$

El valor de e puede variar entre $e = 0$ para una colisión inelástica, es decir, cuando toda la energía es disipada y $e = 1$ para una colisión perfectamente elástica, cuando no se disipa energía.

En teoría el coeficiente de restitución es considerado como una constante propia de cada material, pero se ha verificado que éste puede variar por diferentes causas las que generalmente están relacionadas con los mecanismos de disipación de energía que experimenta el cuerpo.

El único mecanismo de disipación que se abordará en éste trabajo es la disipación debido a las propiedades viscoelásticas de los materiales.

Este tipo de disipación es intrínseca de los sólidos en contacto. Habitualmente los sólidos son representados por un modelo constitutivo que consta de un resorte, que aporta la parte deformable del material y de un disipador, que representa las propiedades viscoelásticas. Sin tomar en cuenta otros mecanismos de disipación, Kuwabara y Kono [17] determinaron un modelo de contacto de Hertz entre dos materiales viscoelásticos por medio de la siguiente relación

$$F_d = \eta \kappa \partial_t (\delta^{3/2}) \quad (1.18)$$

Donde η es el tiempo de relajación viscoelástico del material e incluye coeficientes de fricción interna desconocidos, por lo que generalmente es obtenido de manera experimental [10].

1.7. Cadena unidimensional de esferas en contacto.

Una de las aplicaciones de la teoría de impacto normal corresponde a una cadena unidimensional de esferas en contacto por la cual se propaga un pulso.

Si consideramos una cadena de N esferas de radio R que permanecen en contacto bajo la acción de una fuerza estática de compresión F_0

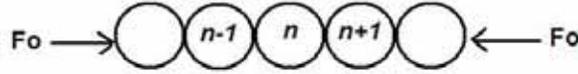


Figura 1.4: Cadena de esferas en contacto.

La compresión entre ellas está descrita por Hertz (Ec.(1.6)), de donde podemos extraer que la aproximación entre los centros debido a F_0 es

$$\delta_0 = \left(\frac{F_0}{\kappa} \right)^{2/3} \quad (1.19)$$

Donde κ es definido por (1.7).

Si las deformaciones entre las esferas están fuertemente confinadas a una región muy pequeña en las cercanías del punto de contacto, es posible modelar la cadena como un grupo de masas puntuales con $m = (4\pi\rho R^3)/3$ donde ρ es la densidad del material y R el radio de las esferas, las cuales interactúan por medio de resortes no lineales. La dinámica de la cadena es descrita por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas,

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = \kappa [[\delta_0 - (u_{n-1} - u_n)_+]^{3/2} - [\delta_0 - (u_n - u_{n+1})_+]^{3/2}] \quad (1.20)$$

Donde u_n es la posición del centro de masa de la n ésima esfera.

Los signos $+$ indican que la expresión deja de ser válida cuando los cuerpos pierden

contacto.

Ésta ecuación de movimiento para la cadena de N esferas en contacto puede tener dos aproximaciones diferentes

Aproximación Lineal, $|(u_n - u_{n-1})| \ll \delta_0$ Si el traslape δ_0 entre dos esferas contiguas es mucho mayor que la aproximación que puedan experimentar sus centros debido a alguna fuerza dinámica $(u_n - u_{n\pm 1})$, la Ec.(1.6), nos indica que habrá una fuerza estática de valor F_0 entre ellas. Por medio de un desarrollo en límites [11], es posible reescribir la (1.20), despreciando los términos de órdenes superiores

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = \frac{K}{m} [u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n] \quad (1.21)$$

Esta ecuación generalmente describe un sistema de masas puntuales unidas por resortes lineales cuya constante es K descrita por

$$K = \left(\frac{d\delta_0}{dF_0} \right)^{-1} = \frac{3}{2} \kappa \sqrt{\delta_0} \quad (1.22)$$

La solución de la ecuacion (1.21) es por tanto

$$u_n = A e^{i(k2Rn - \omega t)} + A e^{-i(k2Rn - \omega t)} \quad (1.23)$$

Que corresponde a una onda elástica propagándose por la cadena. Donde k es el numero de onda, A la amplitud del pulso.

La relación de dispersión entre el número de onda k y ω

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{K}{m}} |\sin(kR)| \quad (1.24)$$

La velocidad del sonido en la cadena c_c , no debe ser confundida con la velocidad de las ondas acústicas en el volumen del material de las esferas. Esta velocidad esta dada por.

$$c_c = \lim \frac{\omega}{k} = 2R \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{6}{m}} R \kappa^{1/3} F_0^{1/6} \quad (1.25)$$

La Ec.(1.25) nos indica que si no existe fuerza estática, $F_0 = 0$, no se propagarán ondas acústicas por la cadena, dado que $c_c = 0$. Nesterenko [4], llamó a este fenómeno el vacío sónico. Nesterenko también demostró que cuando no existe fuerza estática que comprima las esferas, solo basta que éstas se encuentren en contacto para que a través de ella se propaguen ondas no lineales. Esta situación corresponde a la aproximación no lineal de la Ec.(1.20).

Aproximación fuertemente no-lineal $|u_n - u_{n-1}| \gg \delta_0$

Si las aproximaciones de los centros $(u_n - u_{n\pm 1})$ son mucho mayores que la aproximación inicial que existía entre las esferas, este caso describe a una cadena de esferas que se encuentra solo en contacto, y donde no actúa ninguna fuerza estática F_0 . En este contexto la Ec.(1.20) se transforma en

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = \kappa [(u_{n-1} - u_n)_+^{3/2} - (u_n - u_{n+1})_+^{3/2}] \quad (1.26)$$

En la aproximación $\lambda \gg R$ (longitud de onda mucho mayor que el radio de las esferas), podemos escribir $u_n(t) = u(x, t)$, donde x representa a la abscisa a lo largo de la cadena. Haciendo el desarrollo de serie de Taylor de la función.

$$u_{n\pm}(t) = u(x \pm 2a, t) = u \pm 2au_x + 2a^2 u_{xx} \pm \frac{4a^3}{3} u_{xxx} + \frac{2a^4}{3} u_{xxxx} \quad (1.27)$$

Insertando la (1.27) en la (1.20)

$$u_{tt} = C^2 \left[\frac{3}{2} (-u_x)^{1/2} u_{xx} + \frac{R^2}{2} (-u_x)^{1/2} u_{xxxx} - \frac{a^2 u_{xx} u_{xxx}}{2(-u_x)^{1/2}} - \frac{R^2 (u_x x)^3}{16(-u_x)^{3/2}} \right] \quad (1.28)$$

Si reemplazamos por la variable $\Psi = -\partial_x u$, podemos transformar la (1.28) en

$$\partial_{tt}^2 \Psi \approx c^2 \partial_{xx}^2 [\Psi^{3/2} + (2/5)R^2 \Psi^{1/4} \partial_{xx}^2 (\Psi^{5/4})] \quad (1.29)$$

Donde $c = (2R)^{5/4}(\kappa/m)^{1/2}$. Si consideramos ondas progresivas con velocidad v , de la forma $\Psi(\xi = x - vt)$, la ecuación (1.29), admite la siguiente solución periódica exacta :

$$\Psi = (5/4)^2 \left(\frac{v}{c}\right)^4 \cos^4 \left[\xi / (R\sqrt{10}) \right] \quad (1.30)$$

Si consideramos $(-\pi/2 < \xi / (R\sqrt{10}) < \pi/2)$, esta solución periódica representa una solución tipo solitón [4]. El strain puede aproximarse a $\Psi \approx \delta / (2R)$, por lo que la fuerza de contacto dada por Hertz puede escribirse como $F \approx \kappa(2R\Psi)^{3/2}$, la solución para la fuerza se escribe como

$$F \approx F_m \cos^6 \left[\frac{x - vt}{R\sqrt{10}} \right] \quad (1.31)$$

Para la velocidad obtenemos la solución [10].

$$v \approx \left(\frac{6}{5\pi\rho} \right)^{1/2} \left(\frac{F_m}{\theta^2 R^2} \right)^{1/6} \quad (1.32)$$

Capítulo 2

Material y Método.

2.1. Materiales.

2.1.1. Esferas de acero.

En el experimento se utilizaron 6 o 24 esferas de acero inoxidable de igual diámetro, las que conforman la cadena y una esfera de iguales características pero de menor diámetro como esfera de impacto.

Estas esferas son Tsubaki, carbono cromado (Norma AISI 52100).

Las características de las esferas que conforman la cadena son las siguientes

D	$26,000 \pm 0,125[mm]$
ρ	$7780[Kg/m^3]$
E	$203 \pm 4[GPa]$
ν	0,3
σ_Y	$2[GPa]$

Cuadro 2.1: Propiedades de las esferas de acero utilizadas en el experimento ¹

La esfera de impacto posee $D = 8,000 \pm 0,125[mm]$ y características idénticas a las expuestas en la tabla anterior.

Utilizando éstas propiedades, podemos calcular el área de contacto entre dos de éstas esferas mediante la ecuación (1.11), donde el área queda en función de la fuerza aplicada, $A = 3,52249 \times 10^{-5} F^{1/3}$. Conociendo σ_Y , el área de contacto, y el valor de $\kappa = 12[N/\mu m^{3/2}]$ (calculado para pares de estas esferas mediante la ecuación (1.7)), podemos calcular la fuerza de contacto máxima antes de superar el límite elástico, $F_Y \approx 470[N]$, lo que corresponde a un traslape máximo de $\delta_Y = 11[\mu m]$.

2.1.2. Sensores.

En el montaje experimental se utilizaron tres sensores piezoeléctricos, los que permiten monitorear la fuerza dentro de la cadena mediante un contacto esfera-esfera y en el último contacto esfera-pared.

De los tres sensores, dos de ellos conforman un sensor esfera.

Este sistema consiste en uno de los sensores insertado dentro de una de las esferas partida por la mitad. La masa total del sensor-esfera fue compensada para igualar a la masa de la esfera original. El sistema permite medir la fuerza de contacto dentro de la cadena preservando el contacto esfera-esfera.

El sensor utilizado para medir fuerza dentro de la cadena fue el PCB 200B02 de acero inoxidable Cuyas características son

Sensibilidad	$11,241 \pm 1,686[mV/N]$
Rango de medida (compresión)	$444,8[N]$
Máxima fuerza estática (compresión)	$2669[N]$
Respuesta a baja frecuencia	$0,01[Hz]$
Limite de alta frecuencia	$75[KHz]$
Rigidez	$k_s = 1,9 \cdot 10^9[N/m]$
Dimensiones(diámetro, ancho, superficie efectiva)	$16,51X9,14X12,7[mm]$
Masa	$0,014[Kg]$

Cuadro 2.2: Características del sensor esfera PCB 200B02 ².

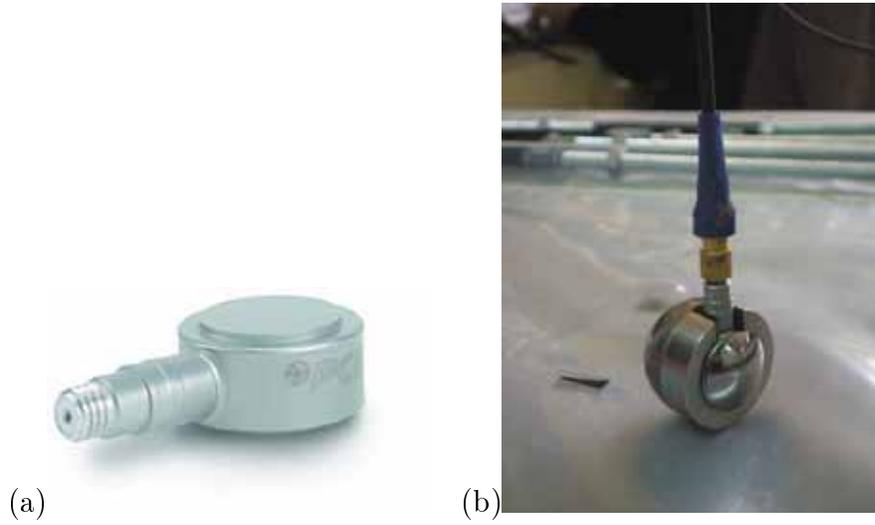


Figura 2.1: (a) Muestra el sensor *PCB200B02* utilizado como sensor esfera.(b) Muestra el sensor esfera.

Como $k_s \gg k_H \propto \kappa \delta^{1/2}$ [10], el acoplamiento de la cadena con el sensor es prácticamente despreciable.

Para relacionar la fuerza medida en el sensor F_s con la fuerza en el contacto podemos escribir la segunda ley de Newton para las masas en el frente + y atrás – del sensor.

$$F_{\pm} = F_s \pm m_{\pm} \partial_{tt}^2 x_{\pm} \quad (2.1)$$

Con $F_s = k_s(x_+ - x_-)$. Estas ecuaciones pueden ser resumidas en

$$\partial_{tt}^2 F_s + \omega^2 F_s = \omega^2 [(1 - \beta)F_+ + \beta F_-] \quad (2.2)$$

Donde se ha introducido la frecuencia de resonancia del sistema $\omega = [k_s(1/m_+ + 1/m_-)]^{1/2}$ y el radio de masa $\beta = m_+/(m_+ + m_-)$. Experimentalmente $\beta = 0,11$ y la frecuencia de resonancia es de $f_0 = \omega_0/(2\pi) = 85[KHz]$. Esto significa que se pueden obtener mediciones para señales cuyos periodos sean mayores a $\tau = 12[\mu s]$. La relación entre F_+ y F_- esta dada por $F_- = F_+(t + t_0)$ donde t_0 puede conocerse como $t_0 = (x_+ - x_-)/v$. Podemos obtener una estimación de v conociendo el tiempo de vuelo

entre dos puntos y la distancia que tardo la onda en recorrerla . La FFT de la ecuación (2.2), proporciona que la fuerza F_+ que corresponde a la fuerza justo en la interfase después del sensor, es igual que F_s . Por lo que la fuerza que entrega el sensor, es la fuerza en el contacto posterior de donde está ubicado.

El sensor utilizado para medir fuerza en el contacto esfera-pared es el PCB 208A11, sus características son

Sensibilidad	$112,404 \pm 1,686[mV/N]$
Rango de medida (compresión)	$44,48[N]$
Máxima fuerza estática (compresión)	$270[N]$
Respuesta a baja frecuencia	$0,01[Hz]$
Limite de alta frecuencia	$36[KHz]$
Rigidez	$k_s = 1,05 \cdot 10^9[N/m]$
Dimensiones (Hex-ancho)	$15,88 \times 29,7[mm]$
Masa	$0,0227[Kg]$

Cuadro 2.3: Características del sensor PCB 208A11³.

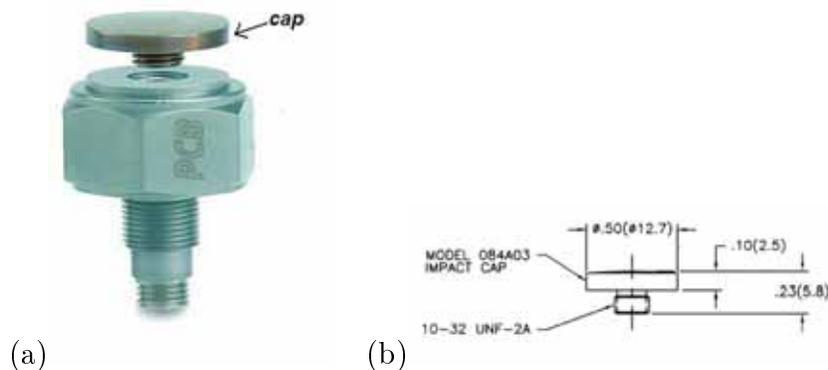


Figura 2.2: (a) Muestra el sensor de pared utilizado para medir fuerza en el último contacto. (b) Muestra las dimensiones del cap cuyas propiedades elásticas (material) variarán con el fin de obtener las mediciones.

2.1.3. Muestras

Metales

Para corroborar la veracidad del método que se está desarrollando, se fabricaron caps de 4 metales cuyos módulos elásticos son conocidos, los que fueron colocados en la parte activa del sensor de pared.

Los discos son de las mismas dimensiones que se muestran en la Fig(2.2(b)).

Las propiedades de estas muestras son

Material	$\rho[Kg/m^3]$	$E \pm 4[GPa]$	ν	$\sigma_Y[MPa]$
Acero Inoxidable AISI 304 (Fe/Cr18/Ni10)	7850	210	0,3	520
Cobre fundido	8960	82	0,33	70
Aluminio	2689	70	0,33	414
Bronce	8900	120	0,33	200

Cuadro 2.4: Propiedades de los metales utilizados para calibrar el método⁴.

Lámina delgada o Film.

Existen varios métodos para fabricar este tipo de láminas, uno de ellos es el llamado *Sol Gel*.

Fabricación. El sol gel es una técnica química usada para la fabricación de vidrios y materiales cerámicos.

En el proceso, una solución que contiene un ión metálico, sol, evoluciona hasta formar un gel en forma red que contiene una fase líquida y una sólida. Esta evolución se desarrolla por reacciones químicas en condiciones sencillas (presión y temperatura ambiente). En esta oportunidad la lámina será de Sol Gel Zirconia.⁵

⁵Detalles de la preparación del Sol Gel Zirconia en el Apéndice 1

Lámina con sustrato.

Luego de creado el sol gel, se deposita una pequeña cantidad de éste sobre un sustrato, que en este caso es el cap de acero inoxidable AISI 304 el que será previamente caracterizado con el mismo test que más tarde se le realizará con el film en su superficie. Luego de que el gel es colocado en la superficie, el sustrato es depositado sobre una plataforma que gira por medio de un motor, homogeneizando el sol gel por acción de la fuerza centrífuga. Ésta técnica para formar la lámina, es llamada, *spin coating*.

Lámina sin sustrato.

Para crear solo la lámina sin ningún tipo de sustrato, el sol gel se deposita sobre una gelatina de agarosa ⁶ preparada sobre un pequeño molde, tal como muestra la Fig.(2.3). El sol gel se vierte arriba de la gelatina creando una capa de espesor $d \approx 3[mm]$ la cual se va emparejando paulatinamente hasta obtener su grosor final.

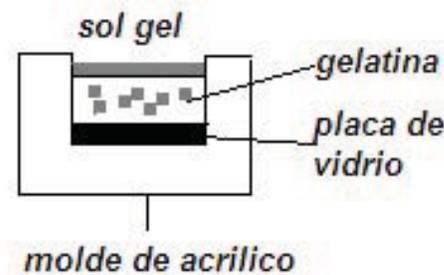


Figura 2.3: Fabricación de la lámina sin sustrato.

El sistema completo es refrigerado por 48 horas, para luego someterse a un baño de agua tibia que deshaga la gelatina. Después de múltiples lavados, la gelatina es disuelta y sobre el vidrio queda la lámina sin sustrato. Esta debe dejarse secar por otras 48 horas a temperatura ambiente. El espesor de la lámina es medida con un tornillo micrométrico dando como resultado $d = 0,020 \pm 0,005[mm]$.

⁶La agarosa es un polisacárido formado por galactosas alfa y beta que se extrae de las algas. Es soluble en agua a temperaturas superiores a los $65^{\circ}C$.

Propiedades mecánicas sol gel Zirconia.

Algunos de valores del módulo de Young para la Zirconia son:

Material	$E[GPa]$	ν
Zirconia sólida	203 ± 8	0,3
Sol gel Zirconia	228 ± 59	$\approx 0,3$

Cuadro 2.5: Propiedades para Zirconia en estado sólido y en estado sol gel ⁷.

Éstos valores serán utilizados más tarde con el fin de comparar los resultados obtenidos.

Medición del espesor de una lámina delgada.

Existen variados métodos para medir espesor de láminas delgadas sobre sustratos, incluso hay instrumentos creados especialmente con este fin. En este caso, el espesor será determinado por medio de un interferómetro de Michelson. La luz utilizada es una lámpara de Cd con $\lambda = 508,6[nm]$.

Por medio de la diferencia de camino óptico que se observa en la interfaz entre la capa y el sustrato sin lámina, es posible obtener el espesor por medio de la siguiente relación [2]

$$d = \frac{a \lambda}{b 2} \quad (2.3)$$

Donde a es el desfase producido por la lámina, b distancia entre máximos, λ es la longitud de onda de la luz con la que se está haciendo la interferencia.

Con el fin de medir éste desfase, se ha dejado un borde del sustrato libre de film.

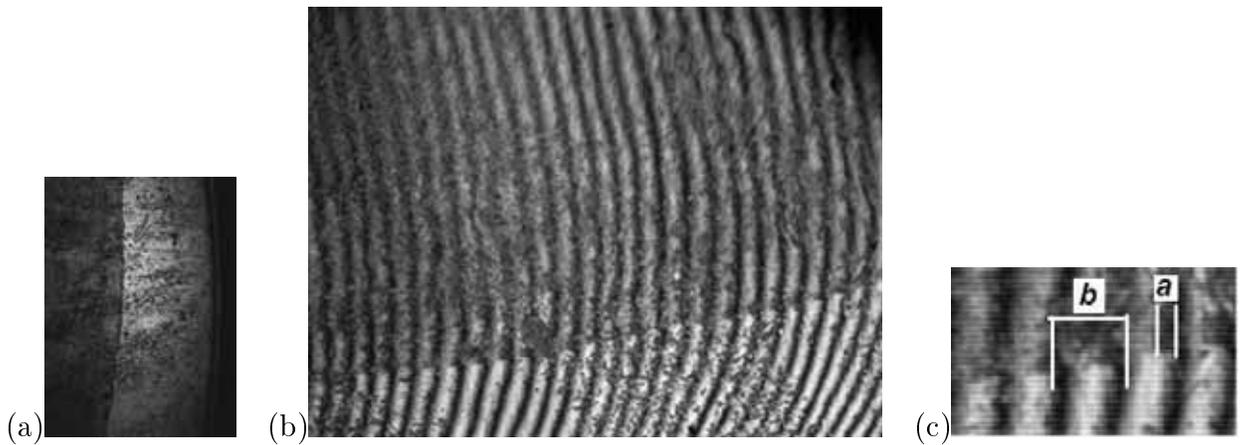


Figura 2.4: (a) Muestra la interfaz entre sustrato y el film. (b) Muestra el cambio de fase que ocurre en la interfaz sustrato film. (c) Variables involucradas en la Ec.(2.3).

Luego se elige una línea y se analiza su intensidad en función de la posición

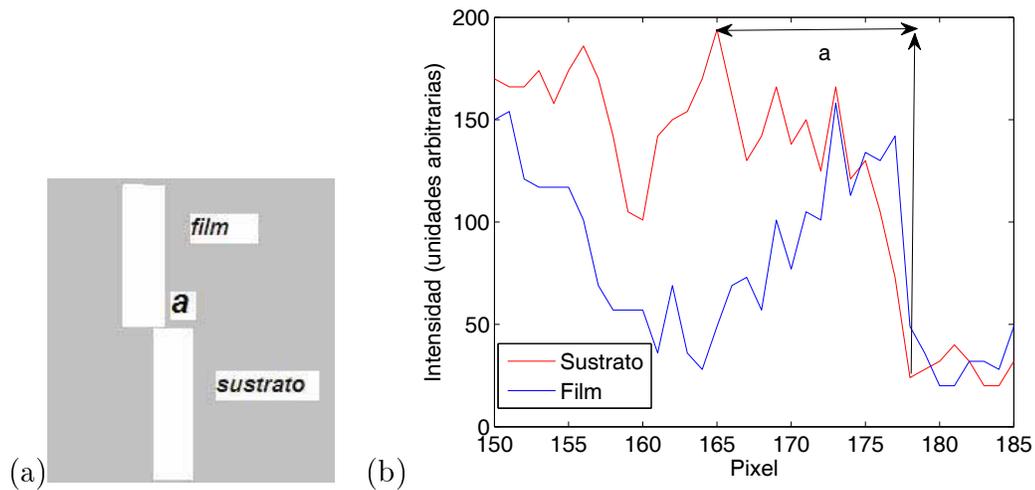


Figura 2.5: (a) Muestra un esquema del desfase de una línea de interferencia. (b) Muestra el gráfico de intensidad para una línea del film y para la del sustrato en la interfase.

Como se ve en la Fig.(2.5 (b)), al existir un desfase, hay un punto donde la intensidad en el sustrato sigue presente cuando la intensidad en el film cae a cero, este es el punto donde comienza el desfase. Luego cuando ambas intensidades se hacen cero, indica su término.

Se calculan las distancias a y b en píxeles para luego hacer una transformación a distancia. Ésta transformación se realiza mirando con el mismo dispositivo algún patrón de medida, que en este caso será una microregla donde cada separación es equivalente a $10[\mu m]$.

Una vez tomada la imagen se hace corresponder el patrón de medida a una cantidad de píxeles.

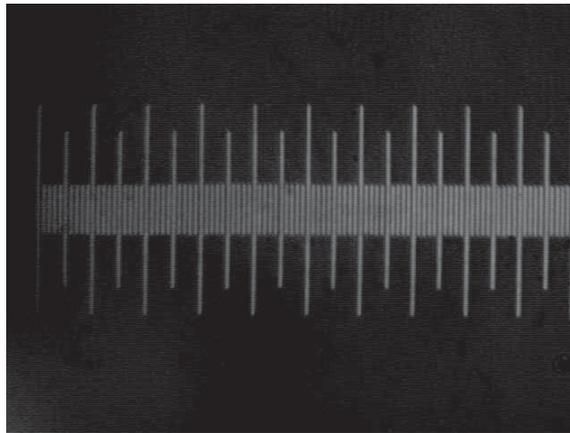


Figura 2.6: La imagen muestra la microregla utilizada como patrón de distancia.

Los valores encontrados son $a = 22 \pm 5[\mu m]$ y $b = 52 \pm 5[\mu m]$. Reemplazando en la Ec.(2.3), se obtiene $d = 0,107 \pm 0,027[\mu m]$ ⁸.

2.1.4. Adquisición.

Para realizar la adquisición de los datos, las señales que salen desde los sensores son amplificadas por el amplificador PCB 482A16, sus principales características son

⁸Cálculo de error Apéndice 2.

Característica	ganancia	valor
Respuesta en frecuencia	1, 10	$0,225[Hz] - 100[KHz]$
	100	$0,225[Hz] - 50[KHz]$
Máxima señal de salida		$\pm 10[V]$
Impedancia de salida		$< 50[\Omega]$

Cuadro 2.6: Características del amplificador PCB 482A16.

Las señales de los sensores esfera, fueron aumentadas $\times 10$, mientras que las del sensor usado como pared $\times 1$. Estas señales son transferidas al osciloscopio Textronix TSD340 el cual posee dos canales de entrada adquiriendo señales a una frecuencia de hasta $100[MHz]$ tomando aproximadamente $500[Ms/s]$.

2.2. Método.

2.2.1. Fundamentos Teóricos, Método de Impulsiones.

Como se dijo anteriormente, al poseer una cadena de esferas solo en contacto y sin ninguna fuerza estática F_0 que las comprima, la generación de un pulso en un extremo de ella dará como resultado la creación y propagación de un solitón. La dinámica de este evento es simulada numéricamente utilizando una rutina escrita en Matlab ⁹, la cual resuelve directamente la Ec.(1.20) por medio de la herramienta ODE 45, la que es básicamente un integrador por Rungekutta de orden 5.

La rutina permite la simulación de una amplia gama de eventos de propagación. Entre algunas cosas se pueden dar velocidades iniciales a cualquiera de las esferas que conforma la cadena, además de posiciones como funciones del tiempo, forzar alguno de los extremos, incluir sensores con sus respectivas rigideces, cambiar las condiciones de borde, poner cargas en algún punto específico, etc.

Las variables a ingresar para realizar el cálculo son: el tiempo en que se resolverá el

⁹Rutina desarrollada por Stephane Job [10]

problema, número de puntos en la curva, exactitud del cálculo (best, good, normal), radio y cantidad de esferas que conforman la cadena, velocidad inicial de algunas de las esferas la que generará el pulso y especificaciones sobre si se utilizará alguna de las condiciones antes señaladas (como extremos forzados, posiciones en función del tiempo, etc...) . En este caso utilizaremos la condición de borde forzado para un extremo mientras que el otro permanece libre. Aquí es posible ingresar también el módulo de Young de la pared que se usará para forzar el extremo como también la curvatura de la pared.

También es posible incluir una término de disipación viscoelástica por medio del factor η el que debe determinarse de forma experimental.

Como variables de salidas obtendremos una estructura para cada una de las siguientes variables: tiempo, posición, velocidad, traslape, fuerza, energía cinética y potencial, energía cinética y potencial de la cadena, y energía total. Cada columna de la estructura contiene el valor de la variable para cada contacto de la cadena en cada instante de tiempo.

Por medio de simulaciones, es posible analizar los valores de energía potencial de contacto y cinética en la cadena, durante el tiempo en que se propaga el pulso.

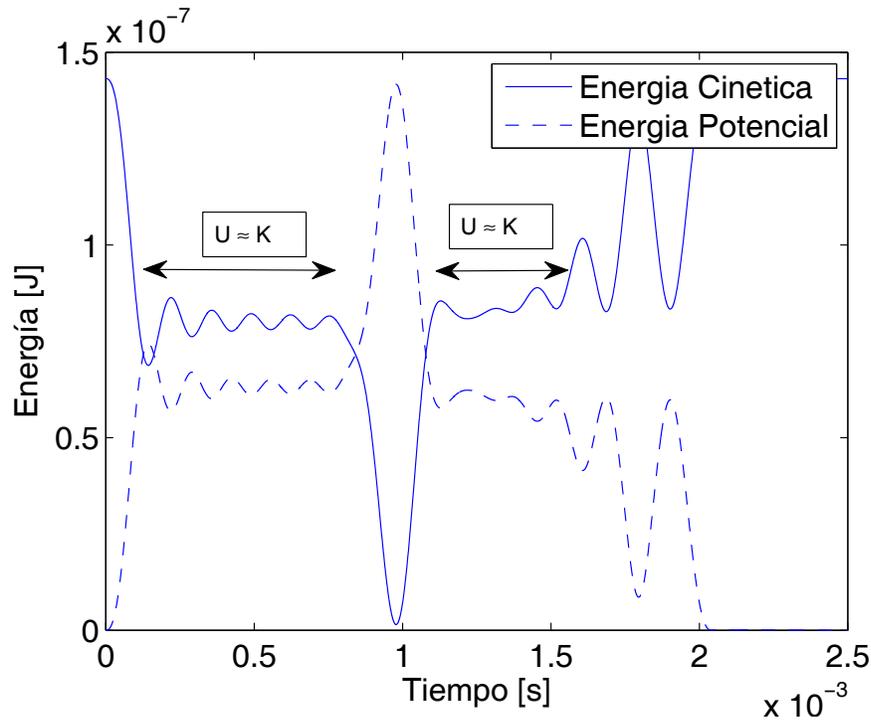


Figura 2.7: Energías potencial y cinética de la cadena.

Bajo estas condiciones, sin considerar la energía de formación de la onda e interacción en el último contacto, la energía total está conformada por un 56 % de energía cinética y en un 44 % de energía potencial.[4, 5].

En consideración de esto diremos que $U_t \approx K_t$ por lo que la energía total puede ser escrita como $E_t = K_t + U_t = 2U_t$.

La energía potencial de la cadena está formada por la suma de las energías potenciales de cada uno de los contactos que hay en ella, lo que es equivalente a la máxima energía que experimenta un contacto cuando la onda se propaga por él. La fuerza en uno de ellos puede ser registrada experimentalmente por el sensor-esfera, antes descrito, al que llamaremos s_1 . De esta forma es posible escribir que $E_t = 2U_{s_1}^{max}$. Cuando el solitón llega al último contacto, formado por la última esfera y la pared, toda la energía del sistema se convierte en energía potencial de contacto, $E_t = U_{pared}^{max}$. De forma experimental la fuerza en el contacto esfera-pared puede ser registrado por el sensor de pared al que llamaremos s_2 , haciendo válida la siguiente relación

$$U_{s_2}^{max} = 2U_{s_1}^{max} \quad (2.4)$$

Recordando las siguientes relaciones $U_{max} = 5/2\kappa\delta_{max}^{5/2}$, $F_{max} = \partial_\delta U = \kappa\delta_{max}^{3/2}$. se puede escribir

$$U_{max} = \frac{2}{5}\delta_{max}F_{max}$$

$$U_{max} = \frac{2}{5} \left[\frac{F_{max}}{\kappa} \right]^{2/3} F_{max} \quad (2.5)$$

$$(2.6)$$

Reemplazando (2.5) en (2.4)

$$\frac{U_{s_2}^{max}}{U_{s_1}^{max}} = 2$$

$$\left[\frac{F_{s_2}^{max}}{F_{s_1}^{max}} \right]^{5/3} \left[\frac{\kappa_{s_1}}{\kappa_{s_2}} \right]^{2/3} = 2$$

$$\left[\frac{F_{s_2}^{max}}{F_{s_1}^{max}} \right]^{5/3} = 2 \left[\frac{\kappa_{s_2}}{\kappa_{s_1}} \right]^{2/3}$$

$$\left[\frac{F_{s_2}^{max}}{F_{s_1}^{max}} \right] = 2^{3/5} \left[\frac{\kappa_{s_1}}{\kappa_{s_2}} \right]^{2/5} \quad (2.7)$$

$$(2.8)$$

κ_{s_1} corresponde al contacto esfera-esfera y κ_{s_2} al contacto esfera-pared, ambos definidos por la ecuación (1.7), pero en el segundo caso considerando $R_p \rightarrow \infty$

$$\kappa_{s_2} = \frac{4\sqrt{R_b}E_pE_e}{3(E_p + E_e)}$$

$$\kappa_{s_1} = \frac{4\sqrt{R_b}E_e}{3 \cdot 2^{3/2}} \quad (2.9)$$

Calculando la fracción entre ambos

$$\begin{aligned}
\frac{\kappa_{s_2}}{\kappa_{s_1}} &= \frac{2^{3/2} E_p}{E_p + E_e} \\
\left[\frac{\kappa_{s_2}}{\kappa_{s_1}} \right]^{2/5} &= \left[2^{3/2} \left(1 + \frac{E_e}{E_p} \right)^{-1} \right]^{2/5} \\
\left[\frac{\kappa_{s_2}}{\kappa_{s_1}} \right]^{2/5} &= 2^{3/5} \left(1 + \frac{E_e}{E_p} \right)^{-2/5}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Incluyendo este resultado en la Ecuación (2.7)

$$\frac{F_{s_2}^{max}}{F_{s_1}^{max}} = 2^{6/5} \left(1 + \frac{E_e}{E_p} \right)^{-2/5} \tag{2.11}$$

Donde E_e y E_p son los módulos de Young de la esfera y de la pared respectivamente. $F_{s_1}^{max}$ y $F_{s_2}^{max}$ son las fuerzas máximas en el sensor de esfera y en el sensor de pared respectivamente.

La Ec.(2.11) nos indica que una variación en el material de la pared, será reflejada por medio de la razón F_{s_2}/F_{s_1} .

Por otra parte, para incluir la disipación viscoelástica en las simulaciones, es necesario calcular experimentalmente el valor de la constante η , la que generalmente está relacionada con el coeficiente de restitución e .

Para obtener el coeficiente de restitución, se tiene: $e = (U_{n+1}/U_n)^{1/2}$, donde U es la energía potencial de contacto de la n ésima esfera. Este es el caso de dos contactos consecutivos, pero en este montaje experimental, los sensores donde se mide la amplitud de la onda, están separados por seis esferas, transformando la expresión en $e = (U_{n+6}/U_n)^{1/6}$. Si considerando la Ec.(1.14), e puede ser definido en función de la fuerza en el contacto como

$$e = \left(\frac{F_{n+6}}{F_n} \right)^{5/18} \tag{2.12}$$

La diferencia de energía potencial de contacto puede ser escrita como el trabajo hecho por las fuerzas disipativas, lo que nos permite encontrar una expresión para el coeficiente de restitución que se relacione con η [10].

$$e = \left(\frac{U_{n+1}}{U_n} \right)^{1/2}$$

$$e \approx 1 - C_v F^{1/6} - \frac{C_s}{F} \quad (2.13)$$

El valor de η queda en función de la constante C_v [10]:

$$\eta \approx \sqrt{10RC_v}/5C \quad (2.14)$$

Mientras que el coeficiente de fricción tiene relación con C_s de la forma, $\mu \approx 4C_s/5mg$. Por el momento éste último término de fricción sólida no será incluido en las simulaciones [10].

El valor de C , se puede determinar ajustando la curva experimental vv/sF a la Ec.(1.32). Mientras que C_v y C_s ajustando la curva $1 - ev/sF_m$ a la Ec.(2.13), donde e esta dado por la Ec.(2.12).

Una vez conocido el factor η , puede agregarse el término de disipación viscoelástica en la Ec.(1.20).

2.3. Método Experimental.

2.3.1. Cadena Unidimensional de esferas en contacto.

Para los experimentos que consideren la propagación de un pulso en una cadena unidimensional de esferas, los montajes experimentales son muy similares, e involucran una cadena compuesta por n esferas dispuestas sobre un riel de acrílico atornillado a una mesa óptica, y una esfera de impacto la que cae desde una cierta altura por una rampa también de acrílico ubicada en el comienzo de la cadena, de manera que al llegar a $h = 0[m]$ entre en contacto con la cadena generando el pulso.

Para que la teoría de impacto normal entre dos cuerpos elásticos tenga validez debe cumplirse:

- El impacto debe ser cuasiestático, cumpliendo los criterios de Love y de Hunter, (1.15), los cuales en resumidas cuentas dictan que $v_c \ll c_0$ donde c es la velocidad del sonido del material. Este criterio siempre se cumple ya que c_0 en el acero es de $c_0 \approx 5000[m/s]$.
- Para evitar deformaciones plásticas, la velocidad de impacto crítica entre los dos cuerpos puede tomar como máximo el valor de $v_c = \sqrt{\frac{4}{5} \frac{\kappa}{m} \delta_c^{5/2}}$.

En el caso del choque entre esfera de $R = 4[mm]$ y esfera $R = 13[mm]$, $v_c = 0,45[m/s]$ y $h_{max} = 0,01[m]$.

En el caso del choque entre esferas de $R = 13[mm]$, $v_c = 0,24[m/s]$.

Se debe considerar que los cálculos fueron hechos utilizando solamente conservación de la energía, ignorando de esta forma cualquier tipo de pérdidas, que sabemos están presentes, de esta forma el valor de h_{max} es solo aproximado.

Por esta razón es que el criterio de definir alturas de lanzamiento no resulta conveniente. Se ha decidido en cambio, variar la altura hasta obtener una determinada fuerza en el contacto la cual no debe sobrepasar los valores de fuerzas críticos que se calcularon anteriormente.

2.3.2. Determinación de la constante de disipación η .

Como se dijo anteriormente, utilizando las Ecs. (2.13,2.12,1.32), podemos calcular los valores C, C_v y C_s para determinar η .

Necesitamos por tanto medir F_n , F_{n+6} y v .

La cadena en este caso, esta compuesta por 24 esferas más dos sensores esferas en las posiciones $n = 9$ y $n = 16$. Éstos sensores proporcionarán las fuerzas F_n y F_{n+6} .

De éstos mismo datos, analizando los tiempos en que ocurren los máximos de cada sensor, el tiempo de vuelo de la onda t_v , es calculado como la resta entre ellos, mientras que conociendo la distancia recorrida en t_v , $d_v = 12R_e$ se obtiene la velocidad, definida por $v = d_v/t_v$.

Una vez soltada la esfera de impacto se captura la señal en el osciloscopio y luego es llevada hasta el computador. Para poder variar la amplitud de la onda incidente, la esfera de impacto es soltada desde diferentes alturas.

Para cada altura se repite el procedimiento 5 veces con el fin minimizar el error estadístico.

Finalmente los datos son analizados con rutinas escritas en Matlab.

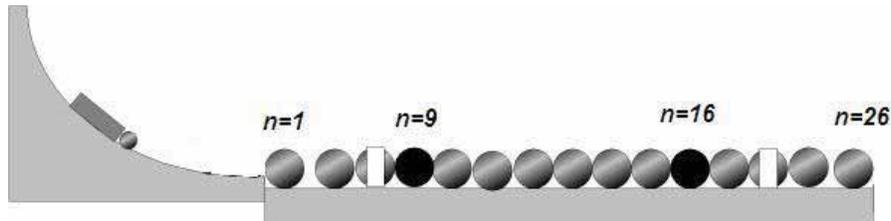


Figura 2.8: Montaje experimental. Las posiciones $n = 9$ y $n = 16$ indican donde están ubicados los sensores esfera.

2.3.3. Determinación de módulo de Young, Método de Impulsiones.

La cadena es conformada por 6 esferas más un sensor esfera s_1 en la posición $n = 4$. Al final de la cadena $n = 8$, se fija el sensor de pared s_2 , en cuya parte activa se

fijan los caps de los diferentes materiales que se usaran.

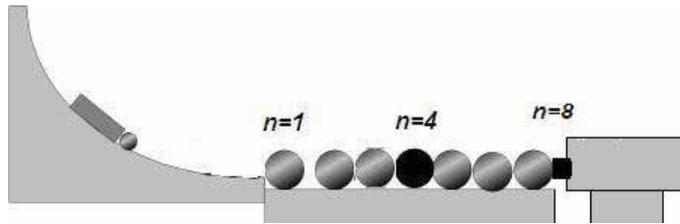


Figura 2.9: Montaje experimental. Las posiciones $n = 4$ y $n = 8$ indican donde están ubicados los sensores s_1 y s_2 respectivamente.

Metales.

Para cada uno de los metales se varía la amplitud de la onda incidente variando la altura de lanzamiento de la esfera de impacto. Se toman datos para al menos 5 amplitudes diferentes y para cada una de ellas se repite el procedimiento 5 veces con el fin de disminuir el error estadístico. Los datos obtenidos son analizados por medio de rutinas escritas en Matlab.

Sol Gel Zirconia.

Lámina con sustrato. En el caso del sustrato con sol gel, primero se capta una imagen de su superficie antes de hacer el test. Luego se varía la amplitud de la onda incidente, y para cada una de las alturas se toman 5 datos. Una vez que se varían las amplitudes, se mira nuevamente la superficie del sustrato con el fin de verificar si el test a causado algún tipo de daño.

El montaje experimental es el mismo de la Fig.(2.9), solo cambia el cap a utilizar.

Lámina sin sustrato. Un trozo de lámina sin sustrato, es colocada entre la última esfera de la cadena y un cap de acero AISI 310 previamente caracterizado por el mismo método. El montaje utilizado es el de la Fig.(2.9).

Una vez que la lámina queda fija en el último contacto se hace el mismo procedimiento que se realizó en el método de impulsiones para las otras muestras.

Variación del Módulo de Young con el espesor de la lámina.

Sobre 4 caps del mismo aluminio utilizado en la primera parte, se depositan diferentes cantidades del mismo sol gel zirconia elaborado bajo el procedimiento indicado en el apéndice. Los sustratos de aluminio poseen a su alrededor un banda de plástico que contiene el sol gel hasta que este se solidifique. Dependiendo de la cantidad de gel aplicada a cada uno de ellos es el espesor de la capa que se obtendrá. Cada uno de éstos caps fue sometido al método de impulsiones al igual que los metales descritos anteriormente.

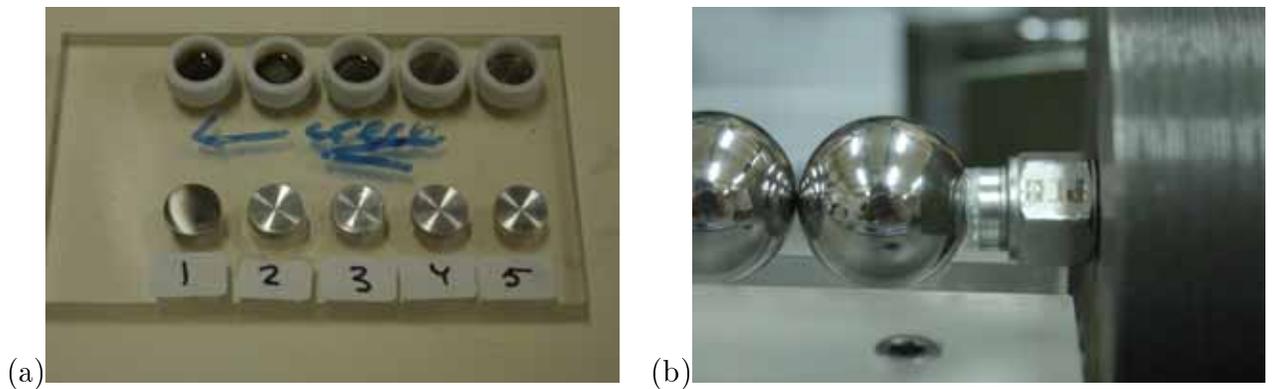


Figura 2.10: (a) Muestra las láminas de sol gel Zirconia de diferentes espesores depositadas sobre sustratos de aluminio, mientras que (b) muestra el contacto lámina esfera utilizado en el método de impulsiones.

2.3.4. Determinación del módulo de Young, Método de flexión.

Para determinar el módulo de Young del sol gel Zirconia por medio de flexión, una muestra de la lámina obtenida sin sustrato, es afirmada por ambos extremos como se muestra en la Fig.(2.11). Una esfera de $D = 6,000 \pm 0,025[mm]$ se coloca en contacto con ella. La esfera va pegada a un microposicionador (sensibilidad $1[\mu m]$), y todo el sistema es puesto sobre una balanza (sensibilidad $1 \cdot 10^{-3}[gr]$). En cuanto la esfera entra en contacto con el film, la balanza se pone en 0. Luego la esfera comienza a bajar

controlada por el microposicionador y se obtiene para una determinada distancia de avance δ un valor de masa en la balanza. Como $F \propto m$, la fuerza y el desplazamiento δ pueden relacionarse con el módulo de Young por medio de la Ec.(1.3), donde la pendiente de la curva $Fv/s\delta$ es igual a $1/k$ con $k = L^3/E4ab^3$. Donde a es el ancho, b es el espesor y L es el largo.

Es necesario por tanto conocer el valor de a , b y L , en este caso son de :

a	$4,000 \pm 0,025[mm]$
b	$0,020 \pm 0,005[mm]$
L	$25,000 \pm 0,025[mm]$

Cuadro 2.7: Tamaño de lámina sin sustrato.

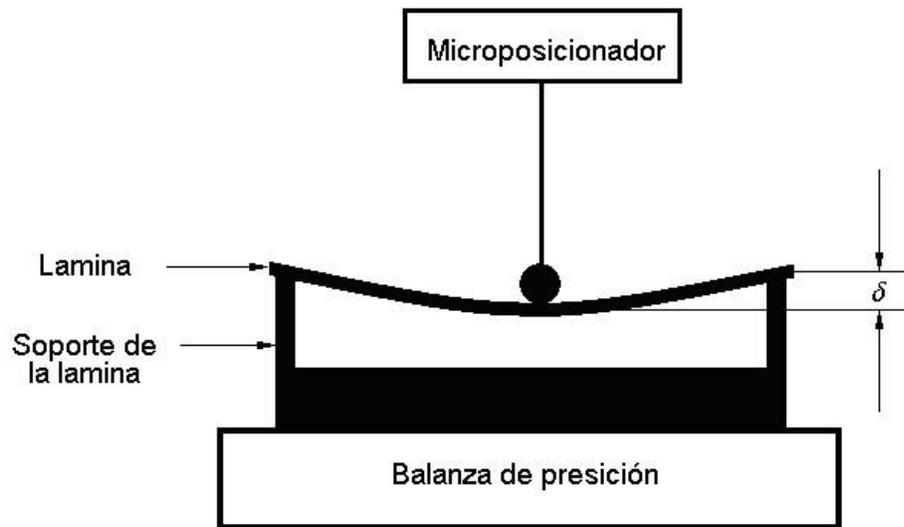


Figura 2.11: Montaje experimental para la determinación de módulo de Young de Sol Gel Zirconia por método de flexión.

Capítulo 3

Resultados y Análisis.

3.1. Determinación de la constante de disipación η .

Cuando un pulso se propaga por la cadena y observamos la fuerza en dos de sus contactos, existe una diferencia entre los datos experimentales y las simulaciones.

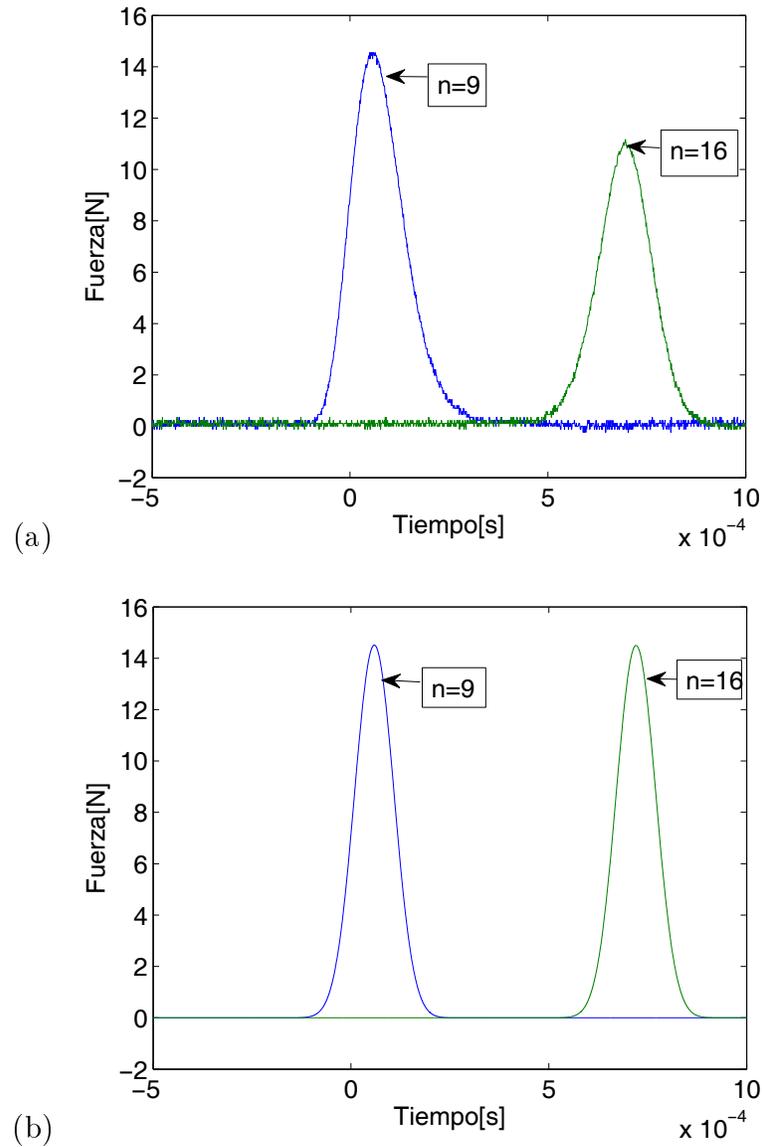


Figura 3.1: (a) Muestra la fuerza en dos sensores separados por 6 esferas para una fuerza incidente de $F = 14,55[N]$ y (b) La simulación para el mismo evento.

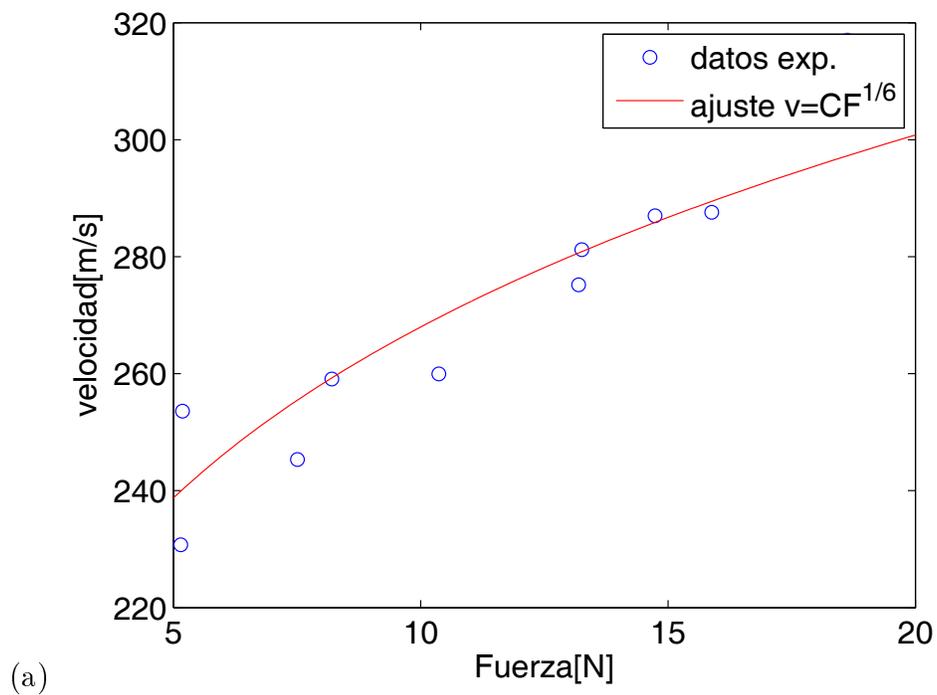
En el caso experimental, la amplitud disminuye en $\approx 24\%$, mientras que el

simulación ésta permanece constante, debido a que no considera términos disipativos. Esta fuente de pérdida puede tener diferentes orígenes como se mencionó con anterioridad.

En las simulaciones existe la opción de incluir una de éstas fuentes de pérdida, la disipación debido a la viscoelasticidad de los materiales.

Para agregarla, es necesario determinar el valor de la constante de disipación η . Éstos permitirá realizar las simulaciones numéricas con mayor precisión.

Por medio de la Ec.(2.14), podemos conocer su valor si antes calculamos las constantes C y C_v . Estas provienen del ajuste de los datos experimentales a la Ec.(1.32) y Ec.(2.13), obteniendo



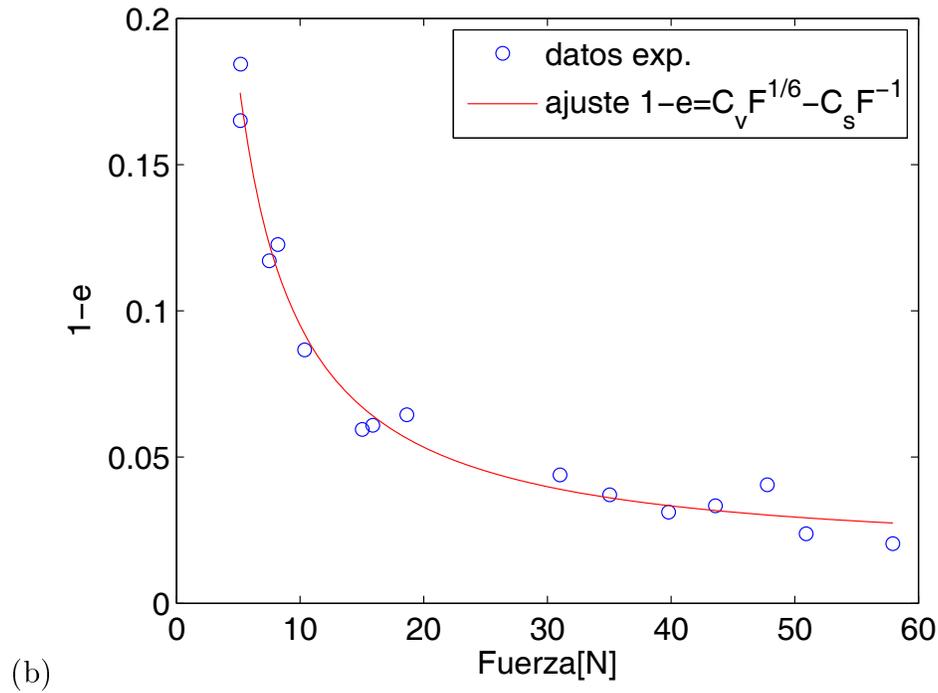


Figura 3.2: Desde el ajuste de los datos en (a) obtenemos C , mientras que C_v y C_s lo obtenemos de (b).

Las constantes encontradas son

$C = 182,6 \pm 4,8[s/Kg]$
$C_v = 6,4 \cdot 10^{-3} \pm 3,4 \cdot 10^{-3}[N^{-1/6}]$
$C_s = 8,5 \cdot 10^{-1} \pm 0,6 \cdot 10^{-1}[N]$

Cuadro 3.1: Constantes necesarias para la determinación de η .

Reemplazando estos valores en (2.14) se obtiene $\eta = 0,58 \pm 0,31[\mu s]^1$.

Utilizando este valor de η en las simulaciones

¹Cálculo del error de η en el Apéndice 3.

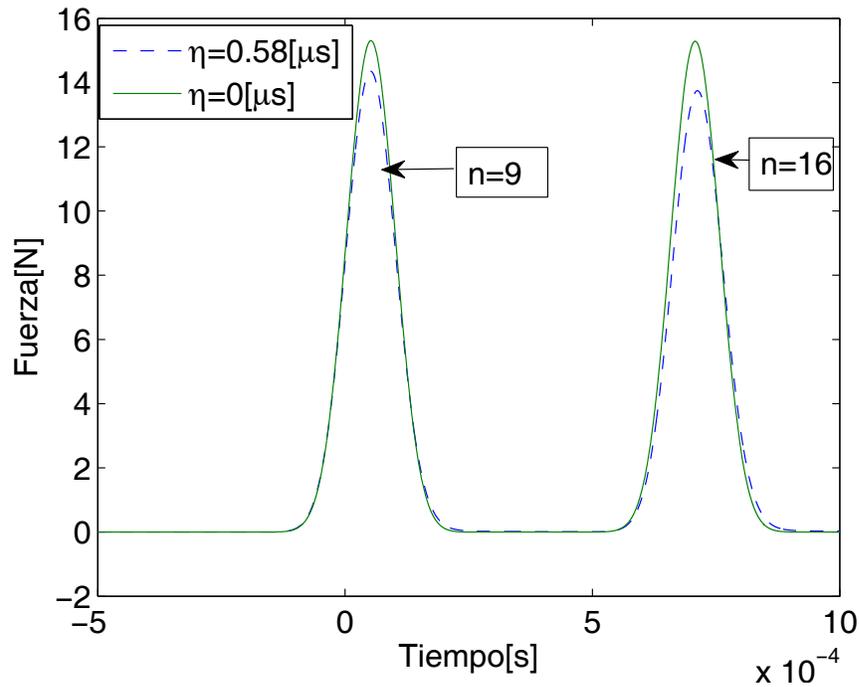


Figura 3.3: Diferencia entre las simulaciones considerando ahora un término de disipación.

La amplitud de la onda ahora es reducida en $\approx 5\%$. Esto nos indica, que experimentalmente la disipación viscoelástica, si bien juega un rol en la pérdida, hay otros mecanismos responsables del 19% de disipación restantes. Éste porcentaje de disipación es alto debido a la cantidad de esferas que existe entre los sensores. Se dispuso este número de esferas con el fin de cuantificar esta cantidad, ya que la disipación de un contacto a otro es casi despreciable.

3.2. Determinación del Módulo elástico de Metales, Método de Impulsiones.

Como se explicó con más detalle en el capítulo anterior, el cálculo del módulo de Young por medio de la Ec.(2.11), hace referencia a un proceso de reflexión ocurrido en el último contacto. Este proceso de reflexión se observa experimentalmente y también en las simulaciones.

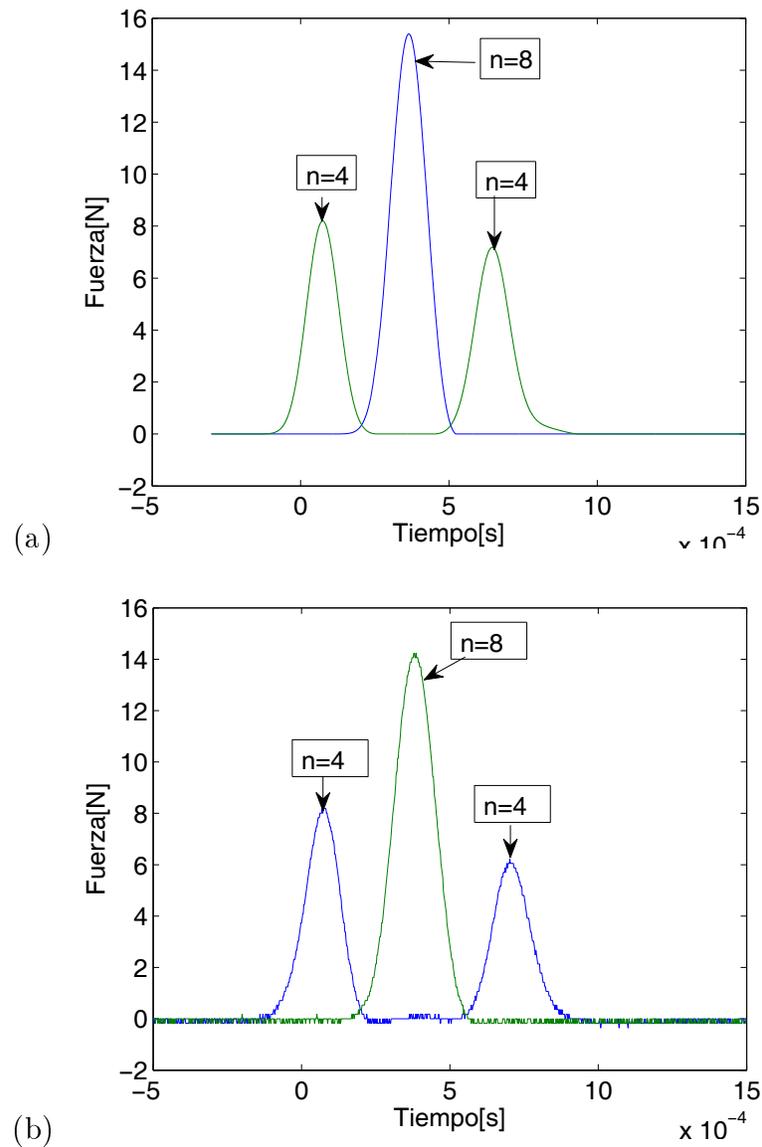


Figura 3.4: En (a) la simulación muestra la fuerza en las posiciones $n = 4$ y $n = 8$ donde se encuentran los sensores, mientras que en (b), se observan la fuerza desde los sensores en las mismas posiciones. La simulación y experimento fueron realizados para una incidente de $F \approx 8[N]$ y una pared con módulo elástico $E_p = 220[GPa]$

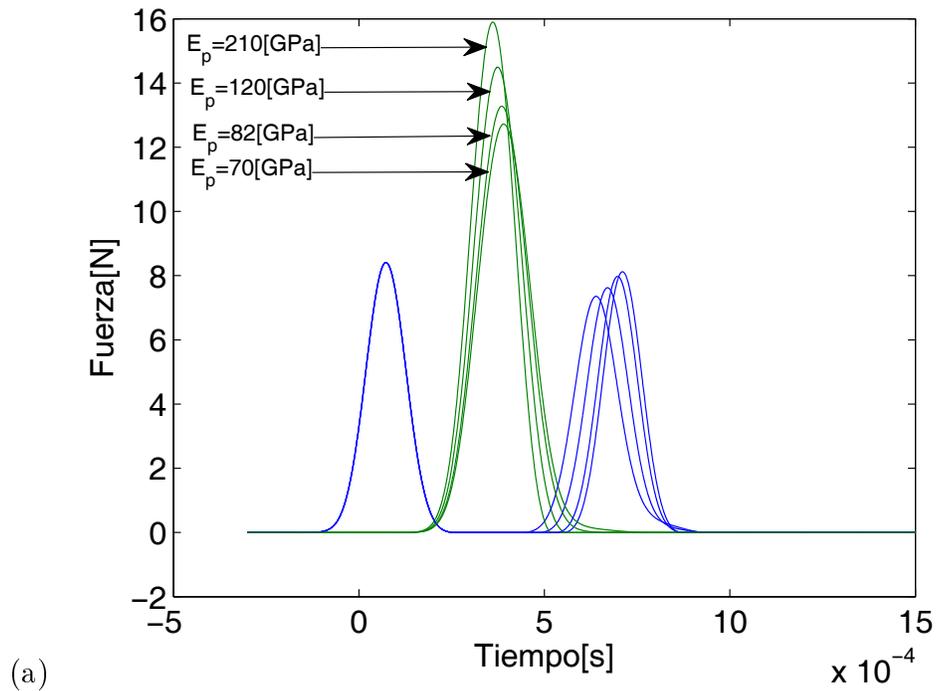
Tanto las simulaciones como la experimentación dan cuenta del proceso de reflexión producido en el último contacto. El primer peak corresponde a la amplitud de la onda incidente F_1 , el segundo, F_2 , nos permite ver al mismo tiempo la onda incidente

y reflejada. Mientras que el tercer peak corresponde solo a la onda reflejada que pasa nuevamente por el sensor s_1 .

Una vez de que tenemos la seguridad de que el proceso reflexivo es visualizado por ambos mecanismos, debemos corroborar que en un cambio en las propiedades elásticas de la pared generará un cambio en la amplitud de la onda reflejada.

3.2.1. Calibración del método para metales.

Si cambiamos el material de la pared (variar E_p), y mantenemos constante la amplitud incidente



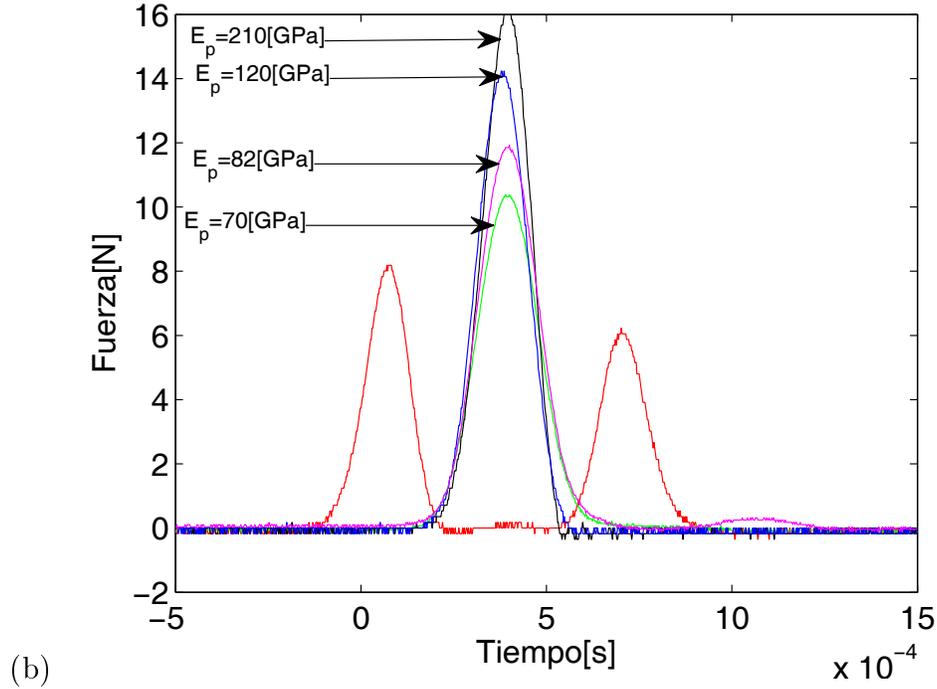


Figura 3.5: En (a) las simulaciones muestran la variación del peak central al cambiar el material de la pared, mientras que (b) Muestra los datos experimentales. Los materiales utilizaron fueron acero, bronce, cobre y aluminio.

El valor de la onda incidente en el gráfico es un promedio de las señales obtenidas de s_1 para una misma altura de lanzamiento, es por esto que a diferencia de las simulaciones, solo se observa un valor para el tercer peak. De ésta forma se asegura que el cambio en la amplitud del peak central (F_2), es debido al cambio del material de la pared y no a la amplitud de la onda incidente.

Mientras más duro es el material, el peak central es más grande, debido a que la disipación ocurrida en ese punto es menor, reflejando casi la totalidad de la onda. Ésta variación en F_2 provoca también una variación en la razón F_2/F_1 , la que en conjunto con la Ec.(2.11), nos permitirá calcular E_p .

Si ahora mantenemos constante el material de la pared y variamos la amplitud incidente F_1 , para cada uno de los metales

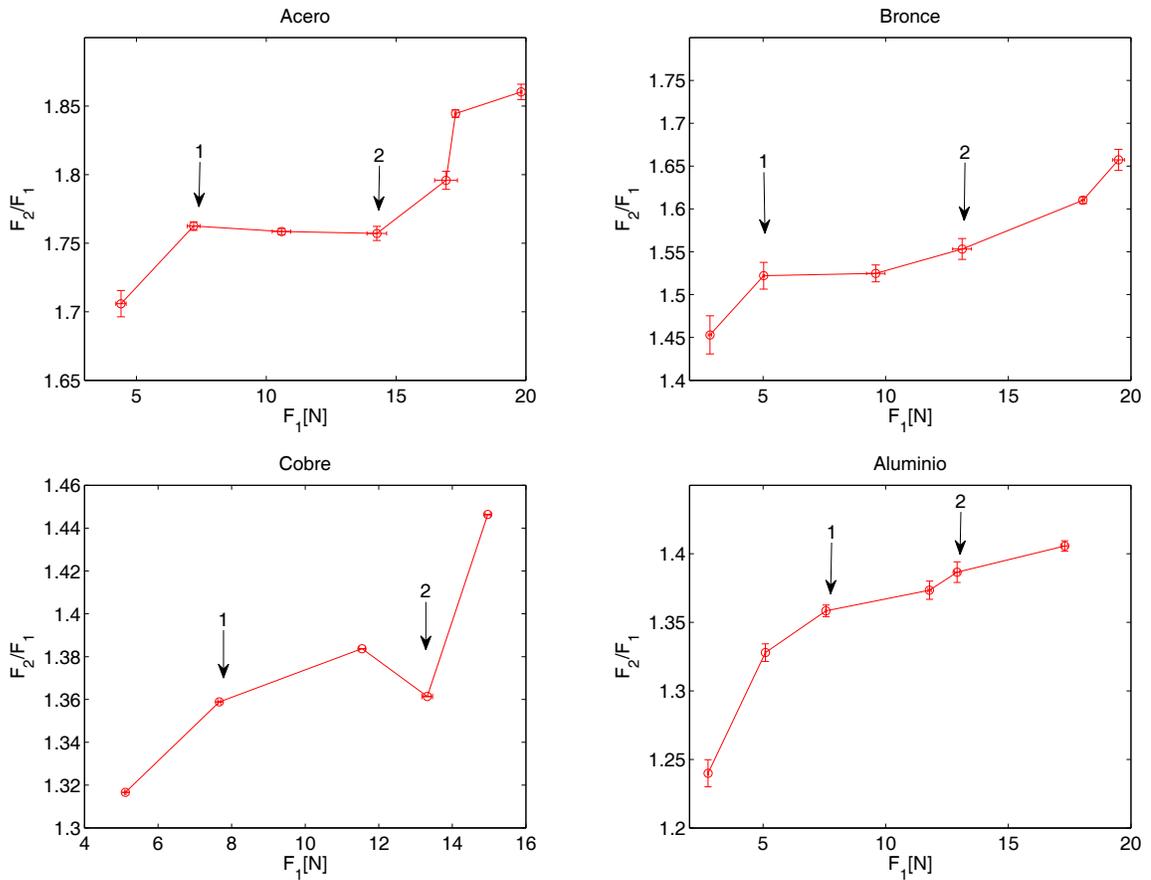


Figura 3.6: Datos experimentales para la variación de la razón entre F_2/F_1 y F_1 para cada uno de los metales

Ésta variación en la razón F_2/F_1 , hace que también varíe el módulo elástico de la pared al ser calculado con (2.11).

Al observar la Fig.(3.6), vemos que cada curva presenta tres tramos. El primero donde $E_p < E_{p_{tabulado}}$, una zona plateau donde $E_p \approx E_{p_{tabulado}}$, el cual está identificado por los puntos 1 y 2 en la gráfica. Y por último donde $E_p > E_{p_{tabulado}}$.

Que el material valla aumentando su módulo elástico hasta llegar a una región más menos constante puede justificarse por medio de las rugosidades. La teoría de Hertz considera que las superficies de los cuerpos son absolutamente lisas y libres de rugosidades, pero en la realidad la mayoría de los cuerpos poseen imperfecciones cuyo radio efectivo es menor que el radio infinito que suponemos para el plano. Cuando

la fuerza en el contacto es pequeña, lo que en verdad se está presionando son las rugosidades del material. El menor radio efectivo de éstas hacen que el módulo de Young sea aparentemente más pequeño que en la realidad.

Mientras la fuerza incidente va aumentando también lo hace la del último contacto, pasando de presionar las rugosidades a presionar el sólido en sí, por lo que en este tramo plateau el valor aproximado es similar al tabulado. Por último el aumento del módulo de Young después del punto 2, el aumento de la fuerza de contacto puede estar provocando un aplanamiento de la esfera contra el plano, haciendo que el radio efectivo de ésta sea mayor que los $13[mm]$ que se consideraron en los cálculos. Ésto causa un aumento en el módulo de Young calculado por medio de la Ec.(2.11).

Los módulos de Young para cada Metal son

E_p	E_p plateau	%error teorico	%error relativo
237 ± 14	216 ± 4	2,86	1,85
126 ± 9	118 ± 3	1,67	2,54
79 ± 2	80 ± 1	2,44	1,25
74 ± 5	77 ± 2	10	2,59

Cuadro 3.2: Módulo elástico determinado por medio de la Ec.(2.11). El error teórico considera la diferencia porcentual entre E_p plateau y los valores tabulados (Tabla(2.4)) y el error relativo es con respecto a sí mismo. ³.

El primer valor de E_p corresponde al calculado usando todos los datos de la curva Fig.(3.6), mientras que el segundo es el valor utilizando solo los datos del plateau.

Si consideramos sólo la zona plateau para el cálculo de E_p , el error disminuye y sólo en el caso del aluminio, el valor de plateau dista más del tabulado.

El error relativo es pequeño debido a que éste proviene solo del error estadístico de los datos. El error instrumental es despreciado ya que es menor en aproximadamente un orden de magnitud.

3.2.2. Determinación del Módulo elástico del Film Sol Gel Zirconia.

Luego de realizar el proceso de fabricación y medición del espesor del film de Zirconia con sustrato, analizamos su superficie bajo el microscopio, con el fin de verificar que la lámina no esté dañada y que la capa presente cierta regularidad.

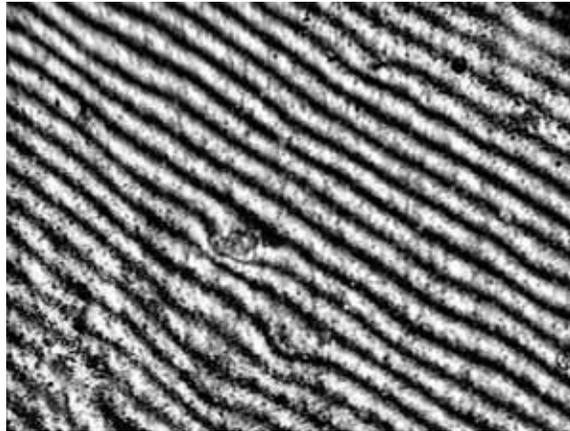


Figura 3.7: Film bajo el interferómetro de Michelson.

Las franjas regulares de interferencia generadas por el interferómetro de Michelson, indican la regularidad de la capa. Ésta no es perfecta debido a algunas desviaciones generadas por impurezas que se adhieren en el proceso de preparación. Una vez corroborado el estado de la capa se realiza el ensayo de fuerzas obteniendo la siguiente curva.

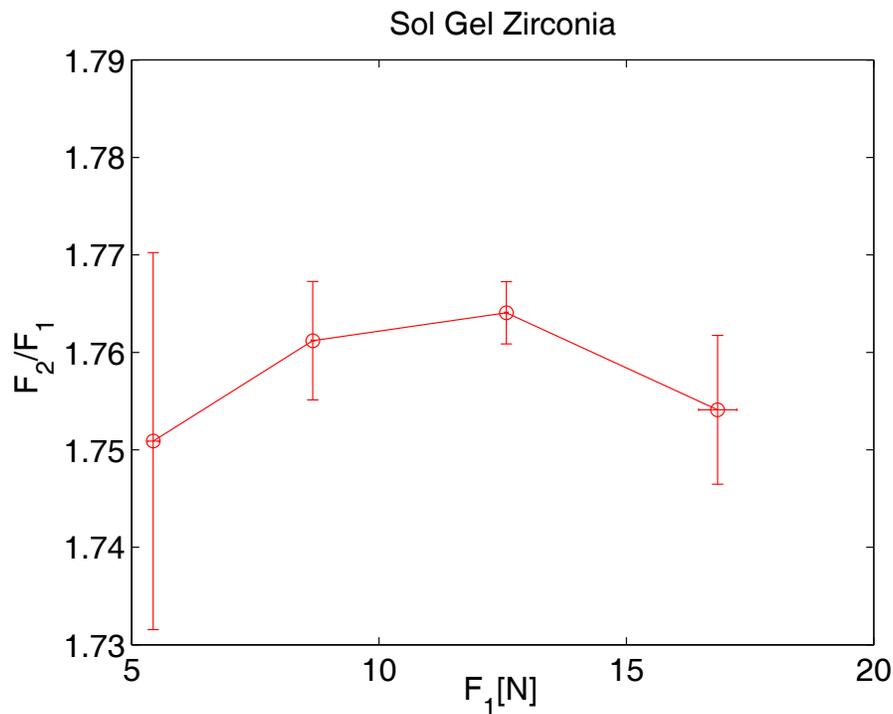


Figura 3.8: Variación de la razón F_2/F_1 con la amplitud de la onda incidente para el sustrato con la lámina.

Si bien existe una variación de la razón F_2/F_1 con la fuerza incidente F_1 , esta no es tan notoria como en los casos anteriores. A diferencia de los metales, el film no posee rugosidades tan pronunciadas, lo que hace que la primera zona observada en las curva de la Fig.(3.6), no sea tan evidente.

Para verificar que el test no ha dañado la lámina ésta es observado bajo un microscopio

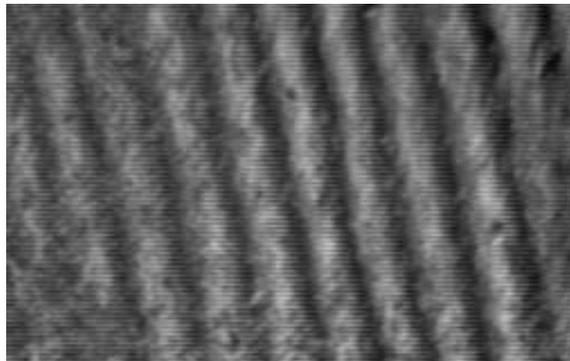


Figura 3.9: Centro de la película mirada después del primer test sigue intacta.

Una vez verificado el estado de la película el valor del Sol gel Zirconia obtenido mediante la Ec.(2.11) es de

$E_p[GPa]$	%error teórico	%error relativo
215 ± 2	5,71	0,93

Cuadro 3.3: Módulo elástico de sol gel Zirconia determinado por medio de la Ec.(2.11).

Si ahora aumentamos la altura de caída de la esfera de impacto hasta una fuerza en la interfaz esfera-pared $F \approx 20[N]$

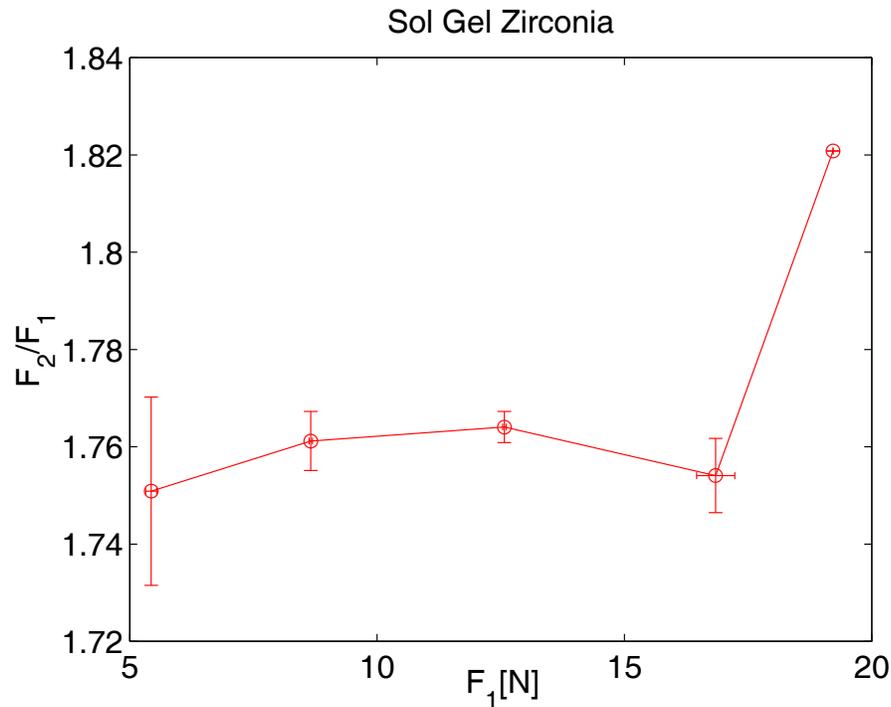


Figura 3.10: Variación de la razón F_2/F_1 con la amplitud de la onda incidente para el sustrato con la lámina, incluyendo el último punto con mayor amplitud.

En éste último punto, al igual que en el caso de los metales la razón comienza a aumentar después de haber permanecido constante. Este aumento nos habla, al igual que en el caso anterior de un posible comienzo de deformación irreversible. Para corroborar esta hipótesis se observó la lámina con microscopio e interferómetro de Michelson.

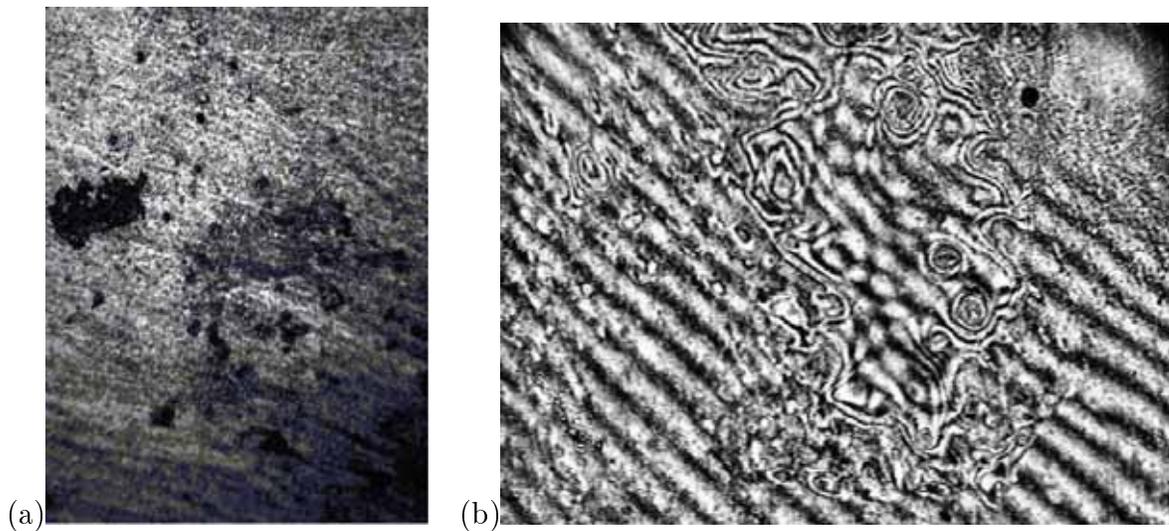


Figura 3.11: (a) Muestra el centro de la película bajo el microscopio, mientras que (b) muestra el centro en el interferómetro de Michelson.

En (a) notamos un pequeño cráter en la superficie de la lámina, indicando cierta ruptura de ésta. Esta hipótesis se comprueba al observar (b), donde la irregularidad del patrón de interferencia en esa zona indica que la lámina sufrió algún tipo de daño. Al igual que en los metales no es necesario que la lámina se rompa por completo en esta zona, sino que sólo deja de deformarse linealmente, dando un rango de fuerzas donde es posible medir correspondiente a $5 - 15[N]$.

3.3. Determinación del Módulo elástico por Flexión.

La distancia de flexión δ y la fuerza ejercida en el centro de la lámina F , se relacionan por medio de la Ec.(1.3). Haciendo una regresión lineal de los datos experimentales podemos obtener el módulo de Young. Se hicieron dos test para la muestra

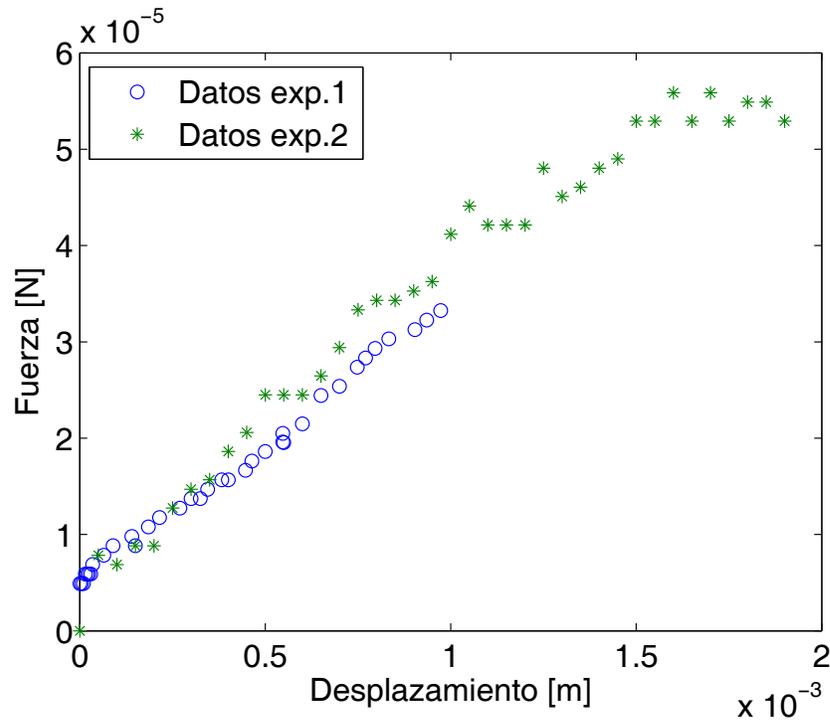


Figura 3.12: Ensayos de flexión para lámina de sol gel Zirconia sin sustrato.

En el experimento 2 la lámina supera el régimen elástico, por lo que los datos de éste tramo, donde la pendiente deja de ser constante se han despreciado en la regresión lineal.

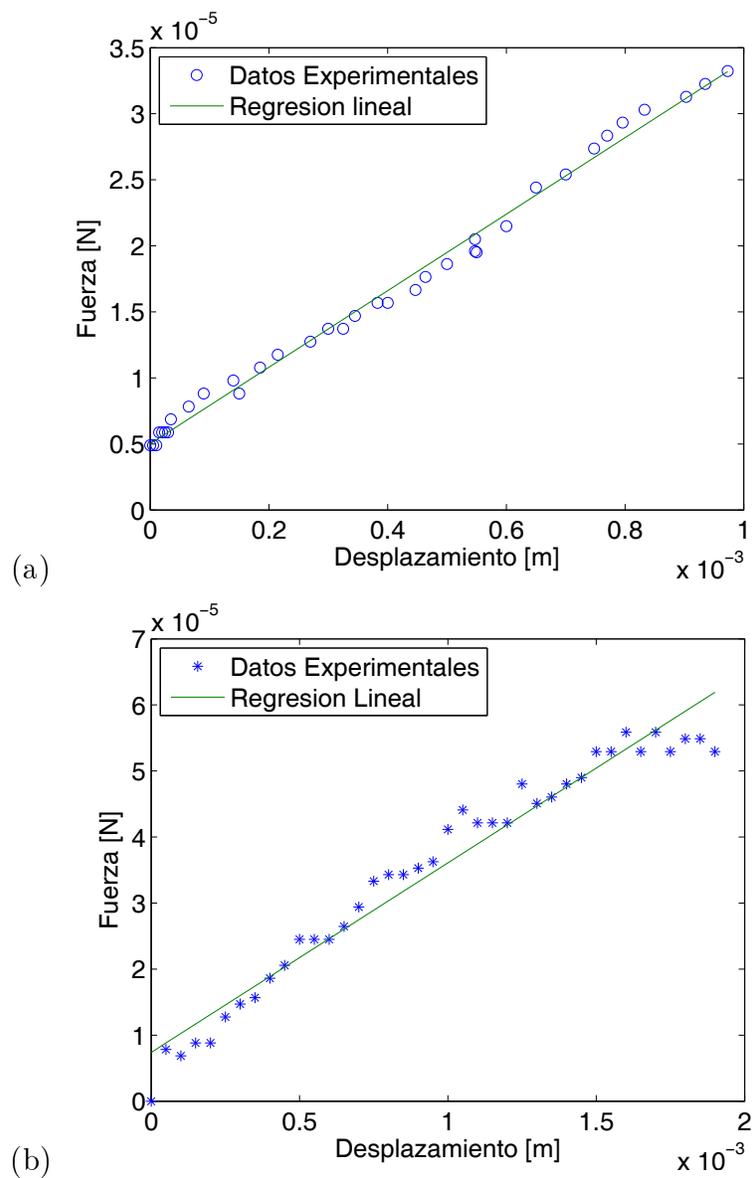


Figura 3.13: (a) Ajuste lineal de los datos del experimento 1. (b) Ajuste lineal de los datos del experimento 2 considerando solo la zona elástica.

los valores de la pendiente y el intercepto para cada línea son

	Experimento 1	Experimento 2
m	$28,96 \cdot 10^{-3} \pm 0,78 \cdot 10^{-3} [N/m]$	$32,22 \cdot 10^{-3} \pm 1,8 \cdot 10^{-3} [N/m]$
b	$5,06 \cdot 10^{-6} \pm 0,39 \cdot 10^{-6} [N]$	$5,34 \cdot 10^{-3} \pm 1,63 \cdot 10^{-3} [N]$

Cuadro 3.4: Valores de las constantes obtenidas por regresión lineal.

El valor de $E_p = mL^3/4ab^3$, donde m es la pendiente de la recta

	$E_p[GPa]$	% teorico	% relativo
Exp 1.	$4,12 \pm 3,06$	98,02	72,27
Exp.2	$4,59 \pm 3,41$	92,99	74,29

Cuadro 3.5: Módulo de Young para lámina de Zirconia determinado por flexión ⁴.

El módulo de Young dista en dos órdenes de magnitud del calculado por el método de impulsiones. Además posee $\approx 95\%$ de error con respecto a los valores obtenidos por otros métodos y un $\approx 73\%$ de error relativo. El hecho de que el método de flexión dependa del espesor como una potencia b^3 , lo hace demasiado incierto. El error con que se determinó el espesor es de $\approx 25\%$ de la medición, propagando el error a la determinación de E .

Sin embargo también es necesario considerar que las condiciones bajo las cuales fueron hechas ambas láminas fueron muy diferentes. El tiempo de envejecimiento fue mayor para el caso de la lámina sin sustrato. Además se sometió a varios lavados con el fin de eliminar la gelatina. Ésta base de agarosa también puede haber difundido elementos químicos a la lámina cambiando en algo sus propiedades.

3.4. Lámina sin sustrato, método de Impulsiones.

La misma lámina de Sol gel Zirconia, sin sustrato, sometida a un ensayo de flexión con sus dos extremos fijos es ahora sometida al método de impulsiones mediante el procedimiento experimental especificado en el capítulo anterior.

El cap utilizado en este caso fue acero inoxidable *AISI310* previamente caracterizado por el mismo método.

Para el acero, la variación que experimenta la razón entre las fuerzas F_2/F_1 con la fuerza incidente es

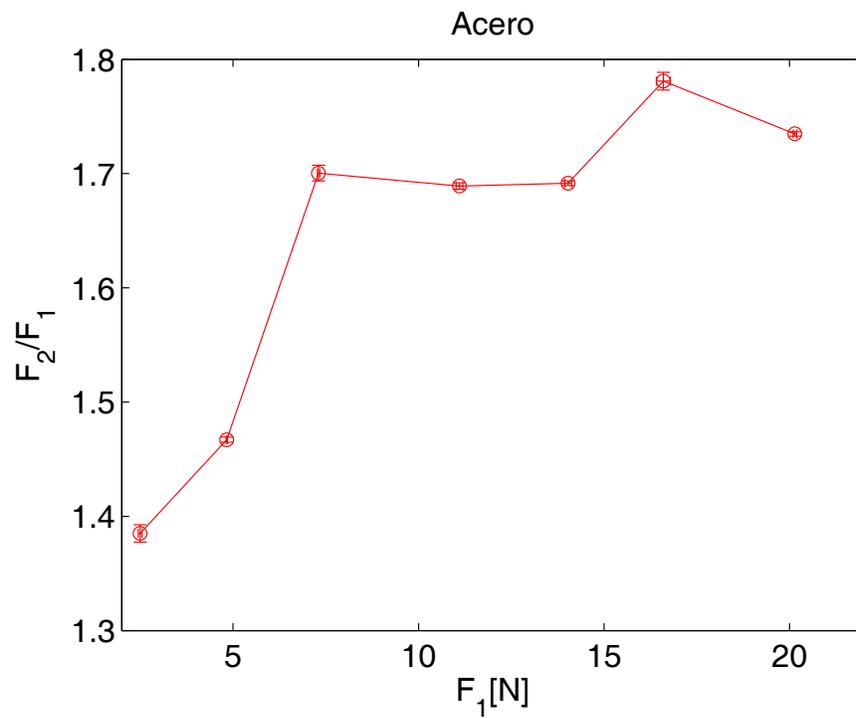


Figura 3.14: Variación de la razón F_2/F_1 con la amplitud de la onda incidente para el cap de acero inoxidable *AISI310*.

el valor del módulo de Young para la zona plateau es de 178 ± 2 [GPa].

Ahora cuando está la lámina entre el gap y la última esfera la variación que experimenta la onda reflejada puede verse a simple vista desde los datos experimentales

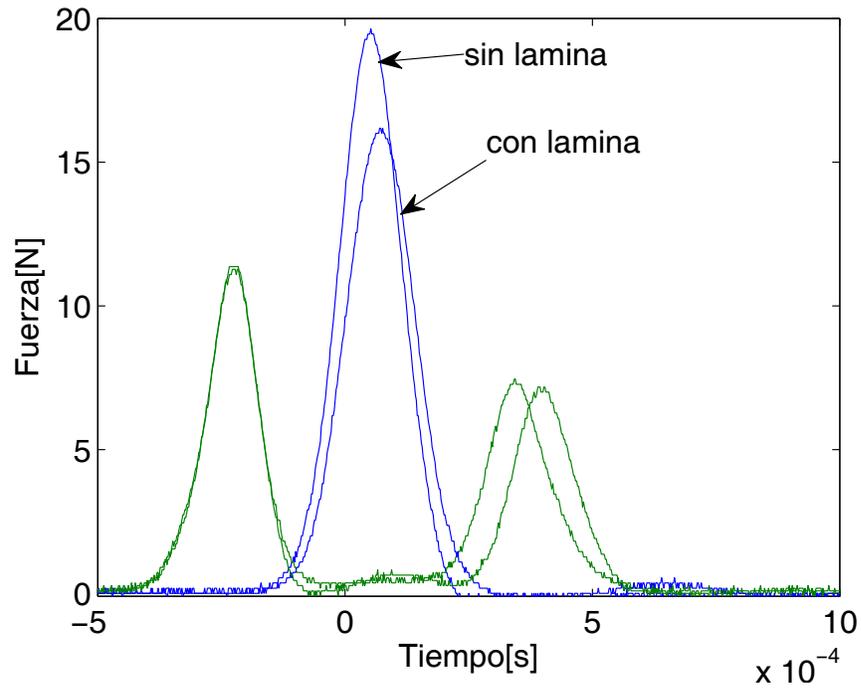


Figura 3.15: Variación de la amplitud en el peak central para una onda incidente de igual amplitud, cuando en el último contacto se coloca una lámina de sol Gel Zirconia .

La razón entre las amplitudes F_2/F_1 también varía en este caso. Haciendo una comparación de ésta variación con la obtenida para el la lámina adherida a un sustrato

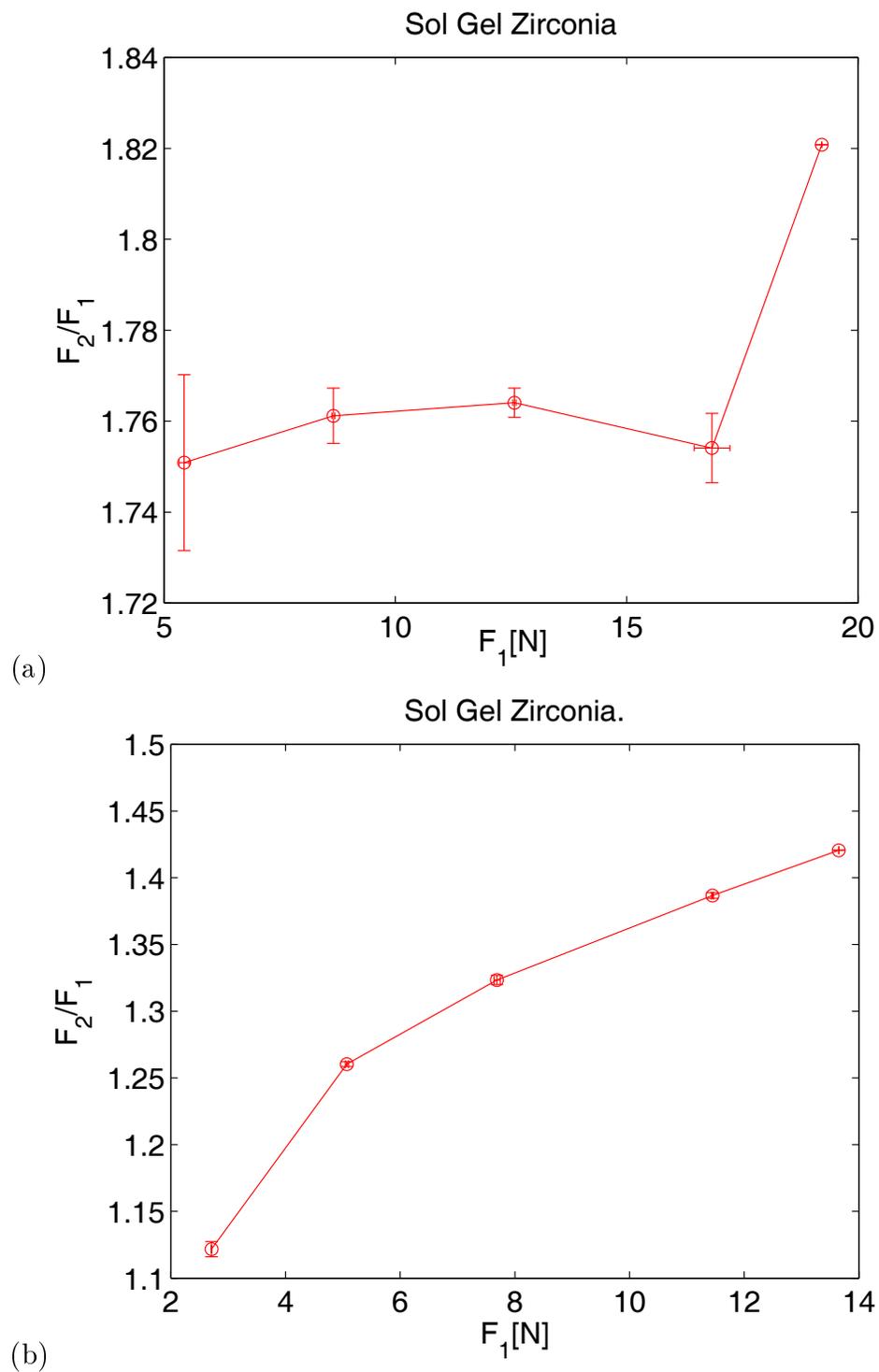


Figura 3.16: (a) Muestra la variación de F_2/F_1 para la lámina de sol gel adherida a un sustrato de acero.(b) Para la lámina sin sustrato dispuesta entre el gap y la última esfera de la cadena.

En el último caso no se observa un valor plateau como en los casos anteriores, la razón siempre va en aumento. El módulo de Young obtenido para esta lámina es de $67 \pm 8 [GPa]$ que difiere en un 32 % del los 215 ± 2 calculados en el caso anterior pero que está más cercano al valor tabulado que el que se obtuvo por el método de flexión. También el resultado posee un error relativo del 12 % en contra del 72 % que se obtuvo con flexión.

El valor del sol gel Zirconia sigue siendo distinto para los casos donde se usa un sustrato y donde no. Sin embargo mediante el método de impulsiones el valor fue más cercano a los anteriores y posee un error relativo menor.

Nuevamente la diferencia entre los métodos para crear la lámina puede estar jugando un rol importante en cuanto a sus propiedades elásticas.

También existe la posibilidad de que el sustrato del primer caso juegue un rol en la medición, es decir que el modulo de Young que se está obteniendo sea una combinación del contacto sustrato-film y no sólo del film. Para corroborar esta última hipótesis se realizó un último ensayo.

3.5. Variación del módulo de Young con el espesor de la lámina.

En 4 sustratos de aluminio previamente caracterizados se fabricaron láminas de sol gel Zirconia de diferente espesor. La variación de la razón entre las fuerzas F_2/F_1 para cada uno de los espesores, se muestra a continuación

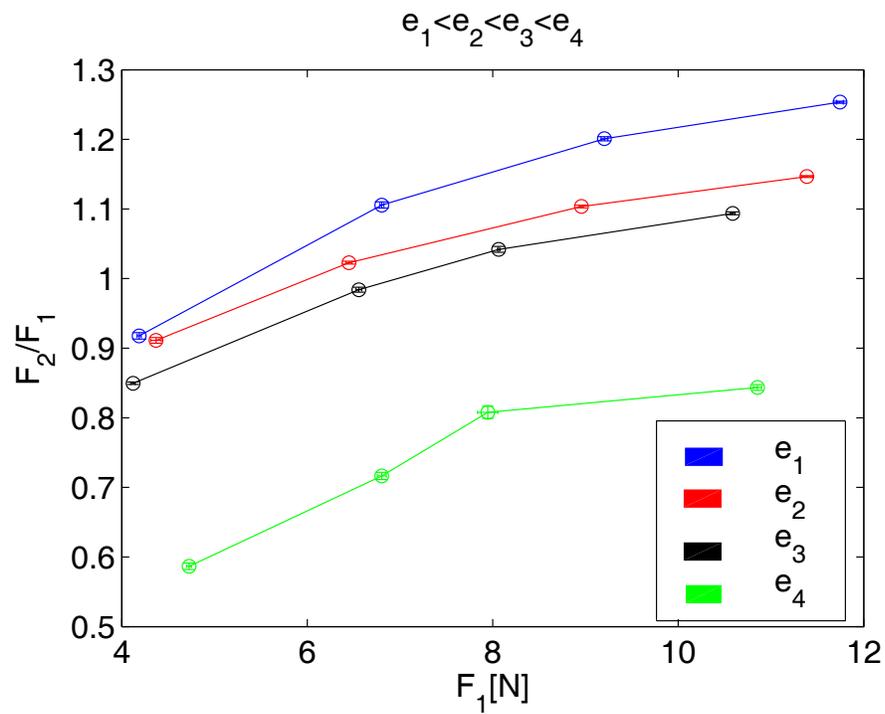


Figura 3.17: Razón entre las fuerzas para láminas de diferente espesor.

Esta variación de la razón entre las fuerzas lleva consigo una variación en el módulo de Young determinado por la Ec.(2.11)

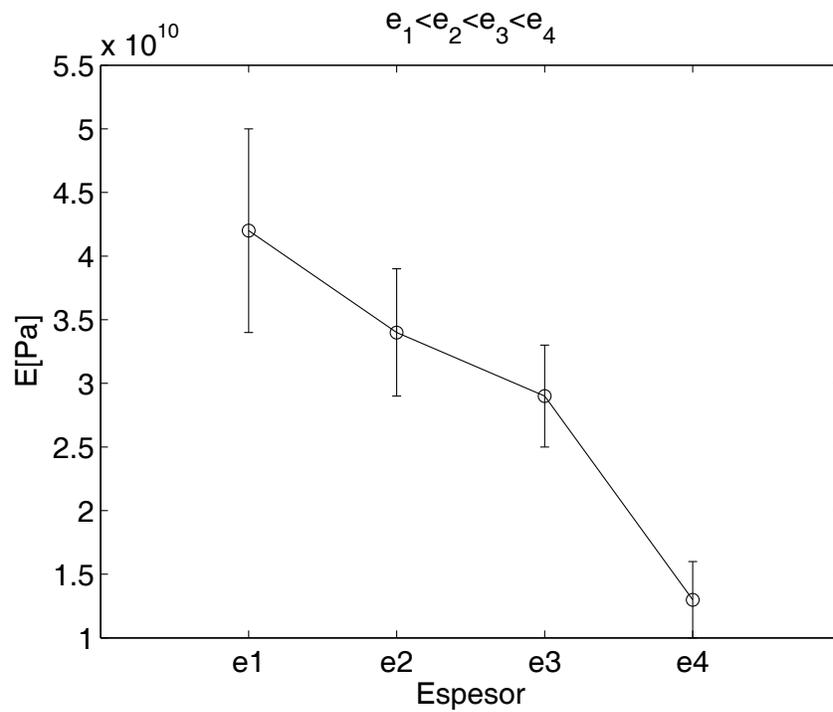


Figura 3.18: Variación del módulo de Young para las láminas de sol gel Zirconia de diferente espesor.

Éstos resultados son expuestos en la siguiente tabla.

	E_p [GPa]
Aluminio	77 ± 2
e_1	42 ± 8
e_2	34 ± 5
e_3	30 ± 4
e_4	13 ± 3

Mientras mayor es el espesor de la lámina, el módulo de Young se acerca cada vez más al obtenido mediante el método de flexión, dejando en claro que si existe una influencia del sustrato sobre el cual se deposita la lámina. Ésta influencia podría disminuir si la longitud.

Capítulo 4

Conclusiones y Trabajos futuros.

4.1. Conclusiones.

Se ha presentado un método no destructivo, capaz de medir el módulo de Young de distintos materiales in situ y de manera localizada.

El método basado en la mecánica de contacto y propagación de ondas no lineales posee numerosas ventajas, entre ellas

- El procedimiento no requiere de equipos sofisticados para determinar los parámetros de interés. Debido a que el test implican el uso de fuerzas dinámicas. La medición se hace sobre $F(t)$ a diferencia de la indentación donde la medida es sobre $\delta(F)$.
- Permite el uso de cantidades macroscópicas para determinar propiedades elásticas, a diferencia de otros métodos convencionales que requieren manejar deformaciones microscópicas.
- Ésta independencia de la deformación hace que el método posea bajo error relativo.
- El test es altamente reproducible.

Se ha verificado el test para materiales conocidos, en este ítem se destaca

- el error absoluto es bajo, en promedio $< 5\%$, esto debido a la buena estadística que se puede hacer sobre los datos.
- El error instrumental se ve reducido al usar fuerzas mayores. Éstas están limitadas por la zona plateau, en donde el error instrumental no se considera debido a que es un orden de magnitud menor que el estadístico.

Debido a las pequeñas deformaciones ($\approx 1[\mu m]$) confinadas al área de contacto, es posible determinar de manera localizada el módulo de Young de láminas delgadas sin destruirlas. Se observa que

- Las mediciones son sensibles al proceso de fabricación de la lámina. Las propiedades de ésta cambian por variados factores como las condiciones ambiente al momento de la preparación (humedad y temperatura), el tiempo que demora en depositarse sobre el sustrato una vez preparado el sol gel, algún tipo de difusión química que pueda existir entre la lámina y el sustrato sobre el que se prepara, etc..
- Las láminas soportadas por el mismo material pero de diferente espesor, presentan diferentes mediciones del módulo de Young. Mientras la longitud de penetración (caracterizada por el radio del área de contacto entre la esfera y el plano), sea mayor que el espesor de la lámina, el espesor de ésta ejercerá una influencia en las mediciones debido al rol que juega el sustrato que la soporta. Sin embargo éste puede caracterizarse de manera independiente para luego modelar el efecto que pueda ejercer en la medición.

4.2. Trabajos Futuros.

- Las disipaciones también son importantes en la determinación del modulo de Young. Mediante el proceso de reflexión podemos confundir lo que disipa el material con lo que disipa la cadena.
Incluir estas pérdidas en los cálculos o tratar de mejorar el montaje para corregir este defecto, haría el método aún más exacto.
- Encontrar el efecto que ejerce el sustrato sobre las mediciones y determinar un espesor o fuerza critica frente a la cual este efecto pueda ser despreciable es uno de los trabajos más importantes a realizar.

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajos futuros

APÉNDICE 1.

Elaboración Sol gel Zirconia. Sin solución Stock.

Protocolo de limpieza previa a la preparación.

Una vez que los artículos (vaso de vidrio, imán agitador) han sido lavados con detergente y agua corriente, proceda a lavar éstos con abundante agua MQ, eliminando de ellos el agua corriente. Termine enjuagando al menos 3 veces con 1-propanol, el objetivo es eliminar todo rastro de agua que se encuentre en ellos.

El resultado final de la preparación dependerá de :

- Humedad ambiental 33 %
- Temperatura ambiente (23/24° C).
- Velocidad con que se agreguen los elementos a la mezcla.

Preparación Sin solución Stock. (todas las unidades están en ml)

Resultado : Volumen total de sol gel 7.74

Ingredientes:

- 1– Propanol: 5,7.
- Propóxido de Zirconio : 1,6
- Ácido Nítrico (NHO_3): 0,29
- Agua MQ : 0,25

Preparación.

- Batir 1– Propanol a velocidad 2 vaso tapado.
- Agregar Propóxido de Zirconio lentamente (por goteo) a 1– propanol.

- Batir por 10 minutos en velocidad 5, vaso tapado.
- Bajar a velocidad 2 para agregar ácido nítrico.
- Agregar ácido nítrico.
- Batir por 10 minutos en velocidad 5, vaso tapado.
- Bajar a velocidad 2 para agregar agua MQ.
- Agregar agua MQ.
- Batir durante 10 minutos a velocidad 5, vaso tapado.

Aplicación. Puede aplicarse o esperar 24 horas. El film resultante dependerá del tiempo de envejecimiento, es decir, del tiempo que se demore en aplicar el sol-gel una vez preparado.

APÉNDICE 2.

Cálculo de error en espesor de la lámina.

Con $d = (a\lambda)/(2b)$

Sólo se consideró el error instrumental del patrón de medida utilizado

$$a = 22 \pm 5[\mu m]$$

$$b = 52 \pm 5[\mu m]$$

$$\lambda = 508,6 \cdot 10^{-9}[m]$$

$$\frac{\partial d}{\partial a} = \frac{\lambda}{2b}$$

$$\frac{\partial d}{\partial b} = -\frac{a\lambda}{2b^2}$$

$$\Delta d = \sqrt{\left(\frac{\partial d}{\partial a} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial b} \Delta b\right)^2}$$

$$\Delta d = 2,655 \cdot 10^{-8}$$

APÉNDICE 3.

Determinación del error en la constante η .

Con $\eta \approx \sqrt{10RC_v}/5C$

$$R = 13,000 \pm 0,063[mm]$$

$$C = 182,6 \pm 4,8[s/Kg]$$

$$C_v = 6,4 \cdot 10^{-3} \pm 3,4 \cdot 10^{-3}[N^{-1/6}]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial R} &= \frac{\sqrt{10RC_v}}{5C} \\ \frac{\partial \eta}{\partial C} &= -\frac{\sqrt{10RC_v}}{5C^2} \\ \frac{\partial \eta}{\partial C_v} &= \frac{\sqrt{10R}}{5C} \end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned} \Delta \eta &= \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial R} \Delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial C} \Delta C\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial C_v} \Delta C_v\right)^2} \\ \Delta \eta &= 0,31256 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

APÉNDICE 4.

Determinación del error en Módulo de Young.

Recordando la obtención de E_p por medio de la EC.(2.11)

$$E_p = \frac{E_e}{(F_2/F_1)^{-5/2} 2^3 - 1}$$

El error dependera de ΔE_e , ΔF_1 y ΔF_2 . ΔE_e es proporcionado por el fabricante de las esferas de acero y es $\Delta E_e = 4[GPa]$. Pero el error en las fuerzas tiene una componente estadística, debido a que se tomaron 5 muestras para cada fuerza, y una componente instrumental, que viene de transformar la señal de voltaje a fuerza por medio de la relación $F = V/k$, donde k es la sensibilidad de cada sensor y que en este caso son iguales a $k = 1,686 \cdot 10^{-3}[V]$.

El error instrumental $\Delta F_{instrumental} = \sqrt{(1/k)^2 \Delta V^2}$ es mucho menor que el de tipo estadístico. debido al orden de k . Asumiendo que $\Delta F_{instrumental} \ll \Delta F_{estadístico}$, el error total en las fuerzas es $\delta F_{1,2} = std(F_{1,2})/\sqrt{N}$, donde N es el número de datos. Si consideramos las derivadas de E_p con respecto a sus variables

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_p}{\partial E_e} &= \frac{1}{A} \\ \frac{\partial E_p}{\partial F_1} &= -\frac{40 E_e F_1^{3/2} F_2^{-5/2}}{2A} \\ \frac{\partial E_p}{\partial F_2} &= \frac{40 E_e F_2^{-7/2} F_1^{5/2}}{2A} \end{aligned} \tag{2}$$

Con $A = (F_2/F_1)^{-5/2} 2^3 - 1$.

$$\Delta E_p = \sqrt{\left(\frac{\partial E_p}{\partial E_e}\right)^2 \Delta E_e^2 + \left(\frac{\partial E_p}{\partial F_1}\right)^2 \Delta F_1^2 + \left(\frac{\partial E_p}{\partial F_2}\right)^2 \Delta F_2^2}$$

APÉNDICE 5.

determinación del error en el módulo de Young por el método de flexión.

El calculo de E viene dado por

$$E = \frac{mL^3}{4ab^3}$$

los valores son :

$$a = 4,00 \pm 0,25[mm]$$

$$b = 0,020 \pm 0,005[mm]$$

$$L = 25,000 \pm 0,025[mm]$$

$$m_1 = 28,96 \pm 0,78 \cdot 10^{-3}$$

$$m_2 = 32,22 \pm 1,80 \cdot 10^{-3}$$

Las derivadas de E con respecto a sus variables son

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a} &= \frac{mL^3}{4a^2b^3} \\ \frac{\partial E}{\partial b} &= -\frac{3mL^3}{4ab^4} \\ \frac{\partial E}{\partial L} &= \frac{3mL^2}{4ab^3} \\ \frac{\partial E}{\partial m} &= \frac{L^3}{4ab^3} \end{aligned}$$

$$\Delta E = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial a} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial b} \Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial L} \Delta L\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial m} \Delta m\right)^2}$$

Bibliografía

- [1] C.Perez, R. Caruso b, P. Miranda b, A. Pajares a y F. Guiberteau *Caracterización mecánica de recubrimientos de sol gel de Zirconia*, VIII Congreso Nacional de Propiedades Mecánicas de Sólidos, Gandía 2002,p.621-630.
- [2] M. Hernández, A. Juárez, R. Hernández *Interferometric thickness determination of thin metallic films*, Sociedad Mexicana de Ciencia de Superficies y de Vacío, vol.9,p. 283-285, 1999
- [3] www.urbipedia.org/index.php/Es_fuerzo_interno.
- [4] V.F Nesterenko, J.Appl. Mech. Tech. Phys., vol. 24, 733,1984.
- [5] V.F Nesterenko, *Dinamic of Heterogeneous materials*, Springer-Verlag,New York,2001.
- [6] S. Timoshenko y J.N. Goodier, *Teoría de la Elasticidad*,Bilbao, Ediciones de Urmo, 1968.
- [7] Landau y E.M Lifshitz, *Teoría de la Elasticidad*,Oxford, Pergamon Press,1986,
- [8] K.L Jonhson , *Contact Mechanics*, Cambrigde, Cambrigde university Press, 1985.
- [9] Eric Falcon, Tesis de doctorado, *Comportamiento dinámico asociado al contacto de Hertz, Colisión y Propagación de ondas en Medios granulares*, Lyon, L'École Normale Superieure de Lyon,1997,p.119-121
- [10] F. Melo, S. JOB, *How Hertzian solitary waves interact with boundaries in a 1D Granular Medium*, Lyon, L'École Normale Superieure de Lyon,1997,p.28-30
- [11] Eric Falcon, Tesis de doctorado, *Comportamiento dinámico asociado al contacto de Hertz, Colisión y Propagación de ondas en Medios granulares*, Chile, Physical REview Letters, PRL. 94, 2005.
- [12] A.E.H Love, *A Treatrise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge, Cambridge Unuiversity Press, 1944.

- [13] S.C. Hunter *Energy Absorbed by elastic waves during impact*, Dans J. Mech. Phys. Solid, Vol 63,1996,p. 162-171.
- [14] J. Reed, *Energy losses due to elastic wave propagation during an elastic impact*, Dans J. Mech. Phys. Solid, Vol 18,1985, p.2329-2337.
- [15] J.P.A. Tillet, *A study of the impact on spheres of plates*,Dans Proc.Phys.Soc.B, vol 67,1954,p.677-688.
- [16] C.Zener,*The intrinsic inelasticity of large plates*,Dans phys. Rev., vol 59,1941,p. 669-673
- [17] G. Kuwabara y K.Kono, *Restitution coefficient in a collision between two spheres*,Dans Jap.J. of Appl. Phys., vol 26 n° 8, 1987, p.1230-1233.
- [18] D. Tabor, *A simple theory of static and dynamic hardness*,Dans Proc. Roy. Soc.A, vol. 192, 1948,p. 247-274.
- [19] C.V.Raman, *The photographic study of impact at minimal velocities*, Dans Phys. Rev., vol. 12, 1918, p. 442-447.
- [20] W. Goldsmith, *Impact* , London, Arnold, 1960.
- [21] A. Kumar, T.Jayakumar, B.Raj, K.K.Ray *Correlation between ultrasonic shear wave velocity and Poisson's ratio for isotropic solid materials.*, Acta Materiala, vol. 51,p. 2417-2426, 2003.