UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA METALÚRGICA

# FLUJOS EN MEDIOS GRANULARES SECOS

FRANCISCO JAVIER VIVANCO AVARIA

2005

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA METALÚRGICA

# FLUJOS EN MEDIOS GRANULARES SECOS

"Trabajo de Tesis presentado en conformidad a los requisitos para obtener el Grado de Doctor en Ciencias de la Ingeniería con Mención en Ciencia e Ingeniería de Materiales"

Profesor Guía: Dr. Francisco Melo Hurtado

FRANCISCO JAVIER VIVANCO AVARIA

2005

A mis padres

# AGRADECIMIENTOS

Quisiera expresar mi gratitud a todas aquellas personas que han participado directa o indirectamente en la concreción de este trabajo. En especial, al equipo humano que conforma el Laboratorio de Física no Lineal de la Universidad de Santiago de Chile. A su director, el Dr. Francisco Melo, por darme la oportunidad de realizar este trabajo y de participar en la fundación de este laboratorio. A Leonardo Caballero, por su constante apoyo en áreas del conocimiento que aún me son oscuras y su especial sentido del humor. Al Dr. Roberto Bernal, por sus acertados comentarios y frases célebres. A los técnicos Manuel Meza y Nelson Flores, sin cuya experiencia, paciencia y apoyo, muchos de los proyectos realizados no hubieran llegado a buen término. Y, en forma muy especial, a su coordinadora ejecutiva, Erika Inostroza, por su constante apoyo, el que ha sido fundamental en el desarrollo de todas las actividades de nuestro laboratorio, sin mencionar su aporte con el toque femenino, tan escaso en nuestra actividad.

# RESUMEN EJECUTIVO

En este trabajo se presenta el estudio del flujo granular en un reloj de arena, la segregación por tamaño en un sistema sometido a vibración y la determinación de la zona de descarga aislada, encontrada en la minería subterránea.

La característica principal encontrada en el flujo, en el reloj de arena, es la presencia de una red de contactos intermitente, la que actúa como un mecanismo de disipación de la energía cinética, acumulada durante los períodos de expansión, y que es capaz de controlar el flujo de salida. A través de la velocidad se ha determinado que, el flujo a la salida del reloj se puede ajustar mediante una curva $c(r_0 - r_0^c)^{3/2}$, donde $c \sim \sqrt{g/2}$ y $r_0^c$ es un radio crítico para el cual el sistema deja de fluir. Aunque los resultados no confirman la presencia de un *arco en caída libre* permanente, sí muestran un arco promedio, cuando se toma el promedio temporal de la red de contactos. Además, mediante el empleo de simulaciones numéricas, basadas en el método de la *dinámica de contactos*, se muestra que la fricción es mucho más importante que la restitución, como medio de disipación de energía.

Los resultados numéricos obtenidos para la segregación por tamaño, muestran todas las características encontradas en experimentos anteriores. También se observa que, tanto el tiempo de ascenso del intruso como la intensidad de la convección dependen fuertemente de la energía inyectada, del tamaño del intruso y de la configuración inicial del sistema de granos.

Por último, en la determinación de la zona de descarga aislada, se ha encontrado que, el modelo de Bergmark-Roos no tiene un fundamento físico apropiado, ya que la densidad obtenida a partir de éste, se incrementa cuando los fragmentos de roca se aproximan a la salida. Por otro lado, el modelo de plasticidad, que no presenta este problema, reproduce con bastante aproximación, las zonas de descarga aislada, obtenidas en experimentos en laboratorio. Finalmente, es posible aproximar los flujos complejos, que ocurren en sistemas donde se extrae material desde varias aperturas, ya sea en forma alternada o simultánea, mediante el

modelo cinemático. Gracias a la linealidad de este modelo, es posible obtener el flujo total como la suma de flujos individuales, lo que simplifica de manera considerable la determinación de la zona de descarga total.

# RESUMEN

El interés por los sistemas granulares se ha incrementado en estos últimos años, producto de sus potenciales aplicaciones en diversas industrias, así como también, por los muchos fenómenos que aún no han sido explicados satisfactoriamente. Esto ha motivado el estudio de tres problemas: el flujo en un sistema tipo reloj de arena, la segregación por tamaño en un sistema granular sometido a vibración y la determinación de la zona de descarga obtenida mediante la extracción por bloques, empleada en la minería subterránea. Los dos primeros, aunque distintos, comparten algunas ideas empleadas en los modelos utilizados en su explicación. En el caso del reloj de arena, se ha realizado una serie de experimentos controlando los parámetros macroscópicos del sistema, es decir, la longitud de la apertura del reloj $D$ y el ángulo de inclinación de las paredes laterales $\alpha$. Se ha observado que la principal característica del flujo es la presencia de una red de contactos intermitente, compuesta por cadenas extendida y arcos. Existe una alta correlación temporal entre la longitud total de las cadenas, presentes en la red, y la velocidad vertical media del sistema. Esta longitud muestra un aumento justo antes de que la velocidad disminuya en forma violenta y viceversa. Este comportamiento refleja los períodos de dilatación y compresión, que ocurren al interior del conjunto de granos, mientras éste se desplaza hacia la salida del reloj. Así, se ha interpretado esta red de contactos, como un mecanismo de disipación de la energía acumulada en los períodos de dilatación del sistema, en donde las partículas, al moverse libremente, aumentan su energía cinética por efecto de la fuerza de gravedad. Por otra parte, el flujo de salida del sistema ha sido descrito mediante la caracterización del campo de velocidades medio. Las componentes de este campo pueden ser modeladas utilizando funciones armónicas simples, que corresponden a una expansión en serie de Fourier a primer orden. De esta forma, la componente radial se representa con una función $cos$ y la componente angular a través de una función $sin$. El comportamiento radial de este campo muestra que la velocidad radial decrece como $1/r$, mientras que, la velocidad angular disminuye más rápidamente, como $1/r^2$. Con

el campo de velocidades medio, descrito completamente, se obtuvo el flujo por unidad de ángulo y de densidad en la salida del reloj. Este flujo admite un escalamiento mediante la función $c(r_0 - r_0^c)^{3/2}$, con $c \sim \sqrt{g/2}$ y $r_0^c$ el radio crítico para el cual el sistema permanece bloqueado indefinidamente. Por otro lado, el promedio temporal de la red de contactos muestra la existencia de un arco, que se ubica cerca de la salida y separa dos regiones, una con alta densidad de contactos y otra libre de ellos. Este arco puede ser interpretado como un *arco en caída libre* promedio. Aunque, se debe mencionar que los experimentos no muestran la presencia de un *arco en caída libre* permanente en las cercanías de la salida. El *arco en caída libre* promedio puede ser representado mediante una curva catenaria, la que ajusta bastante bien con un valor del parámetro $k/d \sim 4$, para $D/d = 5, 6, 7$ y $\alpha = 40°$, donde $k/d$ es la razón entre las fuerzas horizontal y vertical sobre la curva catenaria y $D$ es el tamaño de la apertura, $d$ es el diámetro de las partículas y $\alpha$ el ángulo de inclinación de las paredes. En los flujos cuasiestáticos se observan características similares al flujo gravitacional libre, con una mayor tendencia a la formación de arcos y de cadenas extendidas. En efecto, al reducir la velocidad de salida del sistema, también se reducen fuertemente las fluctuaciones del mismo. Esto facilita tanto la formación de cadenas extendidas como de arcos, lo que explicaría la mayor densidad encontrada de ellos en este caso. De manera análoga, al promediar temporalmente la red de contactos, se observa, al igual que antes, la presencia de un *arco en caída libre* promedio. Además, mediante el uso de flujos cuasiestáticos se ha observado la influencia en el flujo, debido a la rugosidad en las paredes laterales. La principal diferencia radica en el promedio temporal de la red de contactos. En el caso de paredes lisas, las partículas cercanas a éstas pueden deslizar junto con las ubicadas al interior del sistema, provocando que la red de contactos se mueva por un breve instante sin perder su estructura. En cambio, al aumentar la rugosidad de las paredes mediante la adhesión de partículas semicilíndricas, se puede observar que no existe tal deslizamiento, de tal forma que, la única opción de movimiento vertical de estas partículas depende de la dilatación que sufra el conjunto de partículas, de manera de permitirles pasar por sobre las partículas adheridas a las paredes. En consecuencia, el promedio temporal de la red de contactos muestra una distribución menos homogénea y con una mayor tendencia hacia el movimiento lateral de las partículas. Sin embargo, también se han observado las dos zonas separadas por un arco, ubicado cerca de la salida, y que muestran características similares a las descritas anteriormente. Además, se ha encontrado que,

el tensor de deformación de corte promedio sugiere una forma natural de construir arcos siguiendo una de sus direcciones principales. En consecuencia, se puede suponer que el sistema trata de construir arcos de esta forma los que, en general, no pueden concretarse debido a las fluctuaciones presentes en el sistema. Estos arcos representan un arco promedio característico, siendo los arcos reales fluctuaciones respecto de éste. Con el apoyo de simulaciones numéricas, basadas en el método de la *dinámica de contactos*, se ha estudiado la influencia de los parámetros microscópicos relacionados con la disipación de energía, es decir, la fricción y la restitución. Se ha encontrado que, el parámetro que mayor influencia tiene, tanto sobre la velocidad como el flujo a la salida, es la fricción. Así, a menor fricción más alta la velocidad, siendo este efecto de menor tamaño en el flujo. Por otra parte, los cambios en los coeficientes de restitución no ejercen una influencia apreciable sobre estas cantidades.

El estudio de la segregación por tamaño está sustentado, íntegramente, en resultados obtenidos mediante simulaciones, que al igual que antes, están basadas en el método de la *dinámica de contactos*. Los resultados muestran que, la energía inyectada es una de las variables que mayor influencia tiene sobre el ascenso del intruso, siendo menor el tiempo de ascenso cuanto mayor es la energía. En cambio, cuando la energía inyectada es pequeña, se puede apreciar un ascenso muy lento y discontinuo por parte intruso. Por otro lado, la penetración del brazo de convección, generado por el movimiento vibratorio, se ve aumentada por la presencia del intruso. Sin embargo, el movimiento debido a la convección, es anulado bajo el intruso a medida que éste asciende. Gracias al deslizamiento de las partículas que rodean al intruso y a la formación de arcos bajo éste, es posible observar un ascenso discontinuo del mismo, lo cual es confirmado por las observaciones experimentales. También se ha visto que, el empaquetamiento inicial del sistema de partículas afecta el tiempo de ascenso del intruso. En efecto, cuando se tiene una configuración inicial de tipo hexagonal compacta, el tiempo de ascenso se ve reducido drásticamente en comparación con una configuración inicial desordenada. En cuanto al tamaño del intruso, se observa que a mayor tamaño menor es el tiempo de ascenso. Por último, si el contenedor es demasiado grande no es posible observar el régimen de ascenso discontinuo. Esto sugiere un tamaño óptimo del contenedor para la generación de este tipo de ascenso. Por otra parte, los resultados muestran que ambos mecanismos, de arcos y por convección están presentes en forma simultánea, siendo más importante el mecanismo de arco, sólo cuando el intruso se aproxima al brazo de convección. Una vez que el intruso es

atrapado por el brazo de convección, el mecanismo de arcos desaparece completamente.

Finalmente, se presenta un capítulo en donde se han aplicado los modelos de plasticidad y cinemático a la determinación de la zona de descarga, obtenida mediante el método de excavación por bloques empleado en la minería subterránea. Estos modelos son comparados con el modelo de Bergmark-Roos, considerado en la actualidad como el más apropiado para la descripción de esta zona. Se ha encontrado que, el modelo de Bergmark-Roos presenta un incremento en la densidad a medida que los fragmentos de roca se aproximan a la apertura. Por otro lado, la zona de descarga aislada obtenida mediante el modelo de plasticidad, es más ancha y de menor altura que la obtenida a través del modelo de Bergmark-Roos. Además, el modelo de plasticidad resulta ser muy poco sensible al tipo de dependencia angular considerada para la velocidad. No así con respecto a la dependencia radial, la cual es mucho más fuerte. Por otra parte, la zona de descarga obtenida mediante la extracción simultánea, a través de múltiples aperturas, puede ser aproximada a primer orden mediante el modelo cinemático. Aprovechando de esta manera, la linealidad de este último. Así, la zona de descarga total será la suma de las zonas de descarga individuales. En el caso de extracciones alternadas, es decir por una apertura a la vez, existe una complicación adicional. En efecto, luego de obtener la zona de descarga aislada para la primera apertura que entra en operación, es necesario delimitar la zona de movimiento abarcada por esta extracción. De esta forma, se determina la localización de todos los fragmentos que, luego de esta primera extracción, llegarán a ubicarse dentro de los límites de la zona de descarga aislada, correspondiente a la siguiente apertura que entrará en operación. Esta aproximación puede ser corregida mediante métodos de perturbación. En conclusión, es posible caracterizar todo tipo de formas para la zonas de descarga, ya sean simultáneas o alternadas, a través de la determinación de la zona de descarga aislada por una sóla apertura.

# ÍNDICE GENERAL

**Resumen ejecutivo** **2**

**Resumen** **4**

**Índice de figuras** **11**

**Lista de símbolos** **12**

**1. Introducción** **14**

**2. Dinámica de contactos** **18**

2.1. Introducción . . . . . 18

2.1.1. Métodos basados en el modelo Lagrangiano (modelos discretos) . . . . 19

2.1.2. Métodos basados en el modelo Euleriano (modelos continuos) . . . . . 20

2.1.3. Métodos basados en redes . . . . . 21

2.2. Dinámica de contactos . . . . . 22

2.2.1. Leyes de contacto . . . . . 23

2.2.2. Colisiones . . . . . 24

2.2.3. Ecuaciones de transferencia . . . . . 25

2.2.4. Algoritmo para la dinámica de contactos . . . . . 27

**3. Flujo en un reloj de arena bidimensional** **30**

3.1. Introducción . . . . . 30

3.2. Configuración experimental . . . . . 32

3.3. Características del flujo y efecto de los arcos . . . . . 35

3.4. Flujo cuasiestático . . . . . 41

3.5. Efecto de la rugosidad de las paredes . . . . . 43

3.6. Velocidad y flujo a la salida . . . . . 45
3.7. Arcos y tensor de razón de deformación de corte . . . . . 52
3.8. Efecto de la fricción y de la restitución . . . . . 54
3.9. Conclusiones . . . . . 58

**4. Segregación en una columna bidimensional 63**
4.1. Introducción . . . . . 63
4.2. Preparación del sistema . . . . . 64
4.3. Ascenso del intruso y energía inyectada . . . . . 65
4.4. Efecto del intruso sobre la convección . . . . . 68
4.5. Ascenso discontinuo y arcos . . . . . 69
4.6. Efecto del empaquetamiento inicial . . . . . 72
4.7. Tamaño del intruso y segregación . . . . . 76
4.8. Conclusiones . . . . . 77

**5. Aplicación a la minería 80**
5.1. Introducción . . . . . 80
5.2. Modelo de Bergmark-Roos . . . . . 83
5.3. Modelo de plasticidad . . . . . 86
5.4. Modelo cinemático . . . . . 89
5.5. Zona de descarga para varias aperturas . . . . . 94
5.5.1. Extracción simultánea por dos aperturas . . . . . 94
5.5.2. Extracción alternada por dos aperturas . . . . . 97
5.6. Conclusiones . . . . . 101

**Conclusiones generales y perspectivas 102**

**Bibliografía 112**

**A. Ecuaciones de transferencia 113**

**B. Modelo cinemático 116**

# ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Red de contactos . . . . . 15

2.1. Gráfico de Signorini . . . . . 23
2.2. Ley de fricción de Coulomb . . . . . 24
2.3. Ley de Signorini y ecuación de transferencia normal . . . . . 29
2.4. Ley de fricción de Coulomb y ecuación de transferencia tangencia . . . . . 29

3.1. Polariscopio circular . . . . . 33
3.2. Esquema del reloj . . . . . 34
3.3. Configuraciones en flujo granular gravitacional . . . . . 36
3.4. Velocidad media y longitud total de las cadenas . . . . . 37
3.5. Aceleración media y longitud total de las cadenas . . . . . 38
3.6. *Arco en caída libre* dinámico . . . . . 40
3.7. Configuración experimental en flujos controlados . . . . . 42
3.8. Red de fuerzas de contacto en flujos controlados . . . . . 44
3.9. campo de velocidades radial promedio . . . . . 46
3.10. Comportamiento angular de las componentes de la velocidad . . . . . 47
3.11. razón de flujo de masa por unidad de ángulo y de densidad . . . . . 49
3.12. Razón entre las componentes angular $v_\theta$ y radial $v_r$ . . . . . 51
3.13. Tensor de razón de deformación de corte promedio . . . . . 52
3.14. Comparación entre experimentos y simulaciones . . . . . 55
3.15. Variación del coeficiente de fricción . . . . . 56
3.16. Variación del coeficiente de restitución normal . . . . . 57
3.17. Variación del coeficiente de restitución tangencial . . . . . 58
3.18. Variación de ambos coeficientes de restitución . . . . . 59

4.1. Posición vertical del intruso en función de $\Gamma$ . . . . . 66
4.2. Intensidad de la convección . . . . . 67
4.3. Movimiento por efecto de la convección y ascenso del intruso . . . . . 68
4.4. Intensidad de la convección en ausencia del intruso . . . . . 69
4.5. Trayectoria angular de las partículas cercanas al intruso . . . . . 70
4.6. Fuerza impulsora normal sobre el intruso . . . . . 71
4.7. Efecto del empaquetamiento inicial sobre la intensidad de la convección . . . . 73
4.8. Efecto del tamaño del intruso . . . . . 75
4.9. Efecto de la razón de aspecto del contenedor . . . . . 77

5.1. Método de extracción por bloques . . . . . 82
5.2. Parámetros considerados en el modelo de Bergmark-Roos . . . . . 83
5.3. Zona de descarga . . . . . 88
5.4. Zona de descarga en función del material extraído . . . . . 92
5.5. Zona de extracción a través de un agujero finito . . . . . 93
5.6. Zona de extracción para dos aperturas muy pequeñas . . . . . 96
5.7. Zona de extracción alternada . . . . . 98
5.8. Zona de extracción alternada en función de la distancia de separación . . . . . 100

A.1. Contactos múltiples . . . . . 113

# LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|---|---|
| $\mu$ | coeficiente de fricción |
| $\rho_n$ | coeficiente de restitución normal |
| $\rho_t$ | coeficiente de restitución tangencial |
| $\vec{v}_i^-$ | velocidad antes de una colisión |
| $\vec{v}_i^+$ | velocidad después de una colisón |
| $\vec{\omega}_i^-$ | velocidad angular antes de una colisión |
| $\vec{\omega}_i^-$ | velocidad angular después de una colisión |
| $v_i^{n-}, v_i^{t-}$ | componentes normal y tangencial de la velocidad antes de una colisión |
| $v_i^{n+}, v_i^{t+}$ | componentes normal y tangencial de la velocidad después de una colisión |
| $m_i$ | masa de la partícula *i-ésima* |
| $r_i$ | radio de la partícula *i-ésima* |
| $I_i$ | momento de inercia de la partícula *i-ésima* |
| $\vec{R}_{ik}^n$ | impulso normal producido por el choque entre las partículas *i-ésima* y *k-ésima* |
| $\vec{R}_{ik}^t$ | impulso tangencial producido por el choque entre las partículas *i-ésima* y *k-ésima* |
| $m_{ik}^n$ | masa reducida normal |
| $m_{ik}^t$ | masa reducida tangencial |
| $\overline{v}_{ij}^n$ | componente normal de la nueva velocidad relativa |
| $\overline{v}_{ij}^t$ | componente tangencial de la nueva velocidad relativa |
| $A_{ij}^n, A_{ij}^t$ | efecto de las partículas no involucradas directamente en la colisión |
| $d$ | diámetro de los cilindros fotoelásticos |

| | |
|---|---|
| $D$ | longitud de la apertura del reloj en Cap. 3, |
| | diámetro de la partícula grande (intruso) en Cap. 4 |
| $\eta$ | razón entre $D$ y $d$ |
| $\alpha$ | ángulo de inclinación de las paredes del reloj |
| $\langle v_y \rangle_{\vec{x}}$ | promedio espacial de la componente vertical de la velocidad |
| $H$ | altura del campo visual |
| $k/d$ | razón entre las fuerzas horizontal y vertical sobre la catenaria |
| $W$ | razón de flujo de masa |
| $r_o^c$ | radio crítico |
| $D^c \equiv \delta d$ | Longitud crítica de la apertura del reloj |
| $\theta_P$ | dirección de los ejes principales |
| | en el tensor de razón de deformación de corte promedio |
| $f$ | frecuencia de oscilación del contenedor |
| $A$ | amplitud de oscilación del contenedor |
| $\Gamma$ | razón entre la amplitud de la aceleración del contenedor |
| | y la aceleración de gravedad |
| $J_+$ | flujo de masa ascendente |
| $J_-$ | flujo de masa descendente |
| $v_{arcos}^{int}$ | velocidad del intruso en el regimen de arcos |
| $v_{conv}^{int}$ | velocidad del intruso en el regimen convectivo |
| $\theta_G$ | ángulo máximo permitido para las partículas |
| $\Omega_0$ | volumen de la zona de descarga |
| $\theta_w$ | ángulo de las paredes en un contenedor cónico |
| $D_P$ | coeficiente de difusión |
| $Q$ | razón de flujo seccional en dos dimensiones y volumétrico en tres dimensiones |
| $\vec{v}_{Q_{0i}}$ | campo de velocidades producido por una apertura aislada |
| ${}^{id}r_0$ | zona de descarga aislada centrada en $0$ |
| ${}^{id}r_L$ | zona de descarga aislada centrada en $L$ |
| ${}^{id}r_{L\to 0}(t_L)$ | zona de descarga aislada centrada en $L$ |
| | representada en términos de las coordenadas centradas en $y = 0$ |

# CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

La materia granular está presente en muchos de los procesos industriales utilizados en la actualidad, en áreas tan importantes como la minería, la agricultura y la industria farmacéutica [1, 2]. Por ejemplo, el transporte y manejo de rocas en la minería, la mezcla homogénea y precisa de distintos materiales particulados, para formar los medicamentos en tableta y el almacenamiento de las cosechas de granos en la agricultura, son sólo algunos de los aspectos en donde están presentes los materiales granulares. Dentro de los problemas industriales relevantes, que aún no tienen una solución apropiada, se encuentra el mezclado de material granular. Aunque existen diversos métodos para mezclado [3], cada uno de ellos proporciona distintos resultados, dependiendo de la situación en la que sean empleados. Por otra parte, la obtención de resultados apropiados a pequeña escala, no asegura que sean reproducibles a escala industrial. Todas estas dificultades se traducen en mayores costos de producción. Esto ha hecho que las investigaciones relacionadas con este tema, se hayan transformado en una importante y muy dinámica rama de la ingeniería. El interés en los medios granulares no sólo está motivado por su importancia económica, sino que también, se pueden encontrar diversos fenómenos interesantes desde el punto de vista científico, tales como, la convección [4–6], las ondas de superficie [7], las ondas de choque [8], la propagación y fluctuación de fuerzas y esfuerzos [9–15] y la propagación de sonido [16–19].

Un material granular es una colección de partículas que interactúan elásticamente entre sí, cuyo tamaño típico se encuentra por sobre $1\mu m$, bajo este valor la agitación térmica se vuelve importante. Por lo general, estas partículas están rodeadas de algún fluido, usualmente aire, el que puede jugar un papel relevante en la dinámica del sistema. Tal es el caso del viento en la playa, que levanta los granos de arena y permite la formación de dunas a través de un proceso conocido como saltación. La interacción disipativa entre las partículas hace que la materia granular permanezca en un estado de permanente reposo, en ausencia de inyección de energía. El desorden espacial, junto al denso empaquetamiento presente en

la materia granular, conduce a la formación de complejas redes de esfuerzos en su interior, ver Fig.1.1

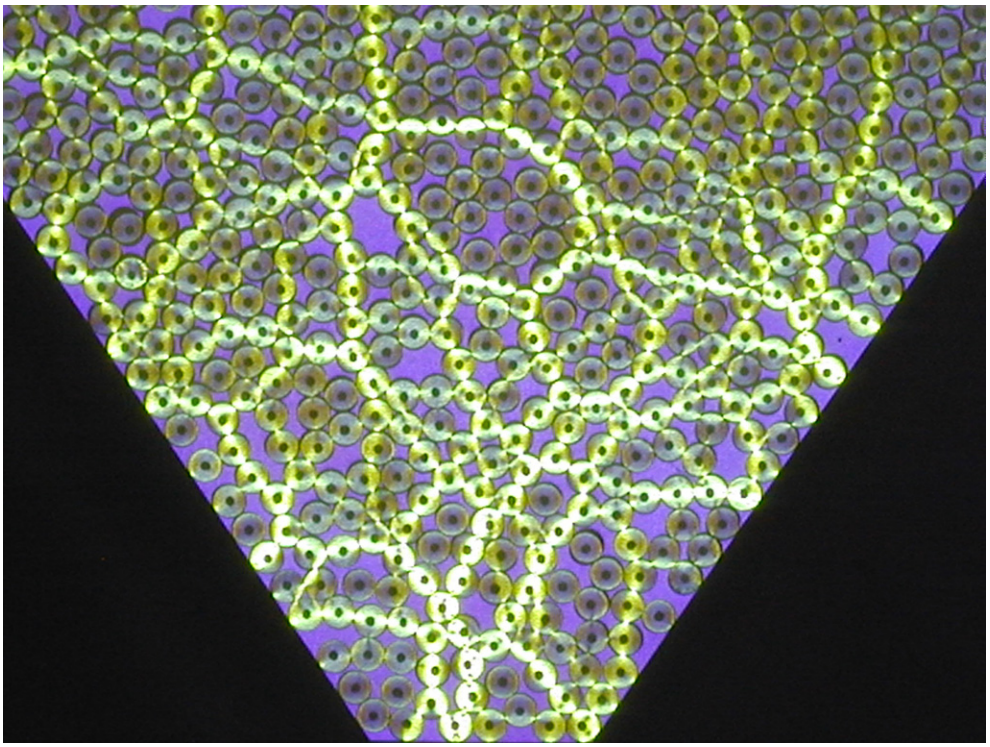

Figura 1.1. Red de contactos al interior de un sistema granular.

Una característica importante de los medios granulares es la forma en que se comportan, estos pueden fluir al igual como lo hace un líquido o bien comportarse como un sólido, por ejemplo, un vehículo puede moverse sobre la arena de una playa sin hundirse completamente. Esta dualidad ha sido una de las principales dificultades encontradas para avanzar en su entendimiento. Muchas de las situaciones prácticas, en las que los sistemas granulares se comportan como fluidos, pueden ser abordadas utilizando descripciones de tipo hidrodinámico [20–23]. Sin embargo, existen otros casos en los que la dinámica está fuertemente afectada por las interacciones entre los granos, formando redes de contactos que facilitan la propagación de todo tipo de perturbaciones al interior del sistema, ejemplos de estos comportamientos pueden ser observados en una capa de arena sometida a vibración [6, 24–26], en estratificación [27], en flujos de superficie y en flujos en silos de descarga [20–22, 28].

Cuando la escala de longitud típica del sistema, por ejemplo el diámetro de salida de un silo, es mucho mayor que el tamaño de los granos, las fluctuaciones en la velocidad son

mucho menores que el valor promedio [29], lo cual permite describir al sistema mediante modelos hidrodinámicos. En cambio, cuando estas longitudes son comparables entre sí, las fluctuaciones en la velocidad son del orden del valor medio [2] y la dinámica está dominada por la red de interacciones que se forma al interior. Estas fluctuaciones se observan claramente en los flujos de tipo Couette [30].

Varios modelos basados en descripciones continuas hidrodinámicas y cinéticas [5, 23, 31–39] y discretos; probabilísticos y de redes [40–42], han sido desarrollados principalmente para los sistemas granulares a escala macroscópica. En cambio, los sistemas donde las fluctuaciones son del orden de los promedios, han sido abordados mediante el uso de simulaciones numéricas [40,43–47]. En ambos casos, se han obtenido resultados cualitativamente correctos, los que reflejan parte de los comportamientos observados en los experimentos. Sin embargo, existen fenómenos importantes, tales como la transición de un estado sólido a uno fluido, el estancamiento de flujos particulados en tuberías y silos de descarga y la generación de ondas de superficie, los que aún no han sido entendidos completamente.

En los capítulos subsiguientes se presenta el estudio de dos fenómenos de particular importancia en los medios granulares, no sólo desde el punto de vista fundamental, sino que también por sus potenciales aplicaciones industriales. Los fenómenos a los que se hace referencia son; el flujo de granos en una geometría de reloj de arena y la segregación de partículas por tamaño, ambos confinados a dos dimensiones. Estos fenómenos, aunque parecen no tener mucho en común, comparten en sus modelos matématicos un mismo concepto, *los arcos*. Efectivamente, en el caso de los flujos, las primeras teorías suponían la existencia de un *arco en caída libre*, capaz de controlar el flujo de salida del sistema, dando de esta forma una explicación al hecho de que, en estas configuraciones, el flujo de salida es independiente de la altura de la columna de granos, ver por ejemplo la Ref. [2]. Por otra parte, una explicación reciente del proceso de segregación por tamaño, introducida por Duran et al [48], considera la existencia de arcos de soporte los que, junto con el deslizamiento de las partículas circundantes, serían los causantes del ascenso discontinuo de las partículas de mayor tamaño, cuando éstas se encuentran fuera de la región afectada por la convección. El estudio de los flujos será principalmente de carácter experimental, apoyado por resultados numéricos, referidos al comportamiento del sistema ante cambios en los parámetros microscópicos, relacionados con la disipación de energía. En cambio, la segregración por tamaño estará íntegramente

basada en resultados provenientes de simulaciones numéricas. En ambos casos, las simulaciones numéricas estarán basadas en el método de *la dinámica de contactos*, desarrollado por Moreau y Jean, ver Ref. [49]. Asociado a estos fenómenos, también, se encuentra una aplicación de gran interés práctico, la que está relacionada con la extracción de material desde una mina subterránea, mediante la técnica de excavación por bloques, en donde es fundamental la descripción del flujo gravitacional del mineral. Así, se presenta un capítulo relacionado con la descripción del flujo de mineral por efecto de la gravedad, empleando los modelos de plasticidad y cinemático, los que son contrastados con el modelo de Bergmark-Roos, considerado en la actualidad, como el más ampliamente aceptado para la descripción de la zona de descarga aislada.

El trabajo está estructurado de la siguiente forma: en el capítulo 2 se presenta en primer lugar, un breve resumen de los métodos que han sido utilizados en la simulación de sistemas granulares, para luego introducir el método de *la dinámica de contactos*. A continuación, en el capítulo 3, se presenta el estudio del flujo de un conjunto de granos cilíndricos, en un sistema con geometría tipo reloj de arena, confinado a dos dimensiones. El sistema será caracterizado a través del campo de velocidades medio, observando experimentalmente, el efecto producido por el cambio en los parámetros macroscópicos y numéricamente en el caso de los parámetros microscópicos. Más adelante, en el capítulo 4 se presenta el estudio mediante simulaciones numéricas del fenómeno de segregación por tamaño, en un sistema bidimensional sometido a vibración vertical. Por último, en el capítulo 5 se aplican los modelos de plasticidad y cinemático al estudio del flujo gravitacional de mineral, encontrado en la minería subterránea.

# CAPÍTULO 2: DINÁMICA DE CONTACTOS

En este capítulo se presentará una breve revisión de los métodos numéricos utilizados en los sistemas granulares. Además, se describirá el método de *La Dinámica de Contactos*, el que será la principal herramienta utilizada en el estudio numérico del flujo granular y la segregación.

## 2.1. Introducción

La utilización de métodos de simulación numérica, aplicada al estudio de sistemas granulares, fue introducida por Cundall [40,43] a principios de la década de los setenta. Desde entonces, se han desarrollado y aplicado diversos métodos de simulación a la descripción de los distintos fenómenos observados en estos sistemas, como por ejemplo los flujos gravitacionales, la segregación por tamaño y las avalanchas. Por otro lado, distintas técnicas de optimización han sido aplicadas, en función de las características del sistema. Esto es, si el flujo es rápido o lento, o si el sistema es diluido (gases granulares) o denso (flujos gravitacionales). Dentro de los factores que han impulsado su aplicación a los medios granulares, se encuentran la mayor capacidad de cálculo computacional, el menor costo de los equipos y la mejora sustancial en los algoritmos utilizados. Esto se ha visto reflejado en el incremento y la complejidad de las investigaciones realizadas.

Los métodos que se serán vistos más adelante no son de aplicación exclusiva a los medios granulares, sino que, su utilidad abarca el estudio de sistemas de estructuras [50], la simulación de sistemas geodinámicos [51] o incluso el estudio de huesos y ligamentos [52].

En general, los métodos de simulación utilizados en sistemas granulares, pueden ser clasificados en dos grandes grupos; los basados en el modelo Lagrangiano y los basados en el modelo Euleriano. O equivalentemente, modelos discretos y continuos. Dentro de ambos grupos es posible encontrar diversos métodos, los que varían según las aproximaciones y

técnicas utilizadas. Por otro lado, también existen métodos que no pueden ser clasificados dentro de estos grupos. Tales métodos están basados en objetos que se mueven e interactúan entre sí, sujetos a ciertas reglas simples y que no hacen referencia al detalle de la dinámica del sistema. Estos son métodos basados en *redes*, ver por ejemplo los autómatas celulares [53,54] y la aproximación de camino aleatorio [42]. A continuación se presenta una breve reseña acerca de los métodos numéricos que han sido aplicados al estudio de los medios granulares.

### 2.1.1. Métodos basados en el modelo Lagrangiano (modelos discretos)

En los métodos basados en el modelo Lagrangiano la naturaleza de los elementos que componen el sistema es considerada discreta. Esto es, los elementos no poseen ningún tipo de conexión entre sí que los mantenga unidos, interactuando sólo a través de colisiones. Estos métodos exigen la determinación de la trayectoria de cada una de las partículas y suponen que, en las colisiones, tanto el momentum lineal como el angular son conservados. Por otra parte, los efectos disipativos son introducidos a través de distintos mecanismos, siendo uno de los más utilizados, la adopción de coeficientes de roce y de restitución. Algunos de los métodos que se encuentran en esta categoría son:

- El *Método de Elementos Discretos*, también conocido como *Método de Partículas Discretas* o *Método de Elementos Distintos* (**DEM** por sus siglas en inglés) [47,55].
- *Dinámica Molecular* (**DM**) [56,57].
- El método conducido por eventos, *Event Driven* (**ED**) [58–61].
- *La dinámica de Contactos* (**CD**) [49].
- *Simulación Directa con Monte Carlo* (**DSMC**) [62–64].
- *Simulación Híbrida con Monte Carlo* (**HSMC**) [65].

Estos métodos presentan varias ventajas; son capaces de describir una gran variedad de fenómenos físicos, pueden manejar partículas de diferentes formas y tamaños e incluir diversas interacciones a través del uso de potenciales, como por ejemplo el potencial de interacción de Van der Waals. Son métodos apropiados para la descripción de sistemas discretos o con partículas de gran tamaño. Sin embargo, no es posible modelar sistemas granulares

que involucren la interacción con fluidos. En el caso de sistemas extremadamente densos el costo computacional puede llegar a ser prohibitivo. Tampoco es posible modelar sistemas hiper estáticos, debido principalmente a la presencia de pequeñas velocidades remanentes. Aunque tal vez, lo más crítico sea que, en algunas aplicaciones industriales, los resultados obtenidos distan demasiado de la situación real.

### 2.1.2. Métodos basados en el modelo Euleriano (modelos continuos)

Los métodos basados en el modelo Euleriano, fueron originalmente desarrollados en la implementación de una dinámica de fluidos computacional, a principio de los años $50$. Desde entonces, se han desarrollado diversos programas computacionales de carácter comercial, basados principalmente en las técnicas de elementos y volúmenes finitos. Como resultado del éxito obtenido por estos métodos en la descripción de los fluidos, comenzaron a ser aplicados a otros campos, como el de la ingeniería mecánica y los sistemas granulares. La principal suposición utilizada en los métodos Eulerianos, es la homogeneidad espacial del sistema en estudio. Si por ejemplo, se desea modelar un fluido con múltiples fases, es necesario introducir un modelamiento matemático adicional, complejo, para cada una de las fases dentro del sistema. Otro aspecto importante presente en los sistemas Eulerianos, es la necesidad de dividir el sistema de coordenadas mediante una grilla, la que puede permanecer fija durante todo el proceso, o bien ser adaptada dinámicamente. En general, se puede distinguir dos situaciones, una en la que la grilla debe ser construida al comienzo del proceso, situación que implica conocer todas las superficies libres del fluido. Esto hace que, en algunos casos, el modelamiento numérico sea prácticamente imposible. Y otra, basada en el concepto de campo de fase (phase-field), en donde las superficies libres son modeladas mediante un valor particular de este campo, ver por ejemplo Ref. [66]. La aplicación de estos modelos a los sistemas granulares, requiere de la incorporación de ecuaciones de conservación para la masa, el momentum y la energía, tanto para el medio granular como para el fluido intersticial, si éste está presente. Además, de una relación de clausura para el esfuerzo de corte. Si por otro lado, el sistema consiste de varias clases de partículas, estas ecuaciones deben ser formuladas para cada una ellas. En cambio, la presión es representada a través de una ecuación de estado. Por otro parte, también se han hecho esfuerzos por desarrollar una teoría cinética del flujo granular [32]. Generalmente, las teorías cinéticas desarrolladas son capaces de describir siste-

mas con partículas de un mismo tamaño. Aunque, se han desarrollado extensiones a mezclas granulares binarias [67], para describir el fenómeno de segregación por tamaño. Uno de los problemas que ha sido detectado en las teorías cinéticas, es la anulación del esfuerzo de corte cuando el sistema granular alcanza un estado de reposo [68]. Algunos de los métodos que están basados en el modelo Euleriano son los siguientes:

- Métodos basados en mallas sin necesidad de un fundamento físico
  - Método de elementos finitos [69,70].
  - Método de volúmenes finitos [71].
- Métodos basados en teorías físicas
  - Métodos tipo hidrodinámicos [72].
  - Métodos basados en teoría cinética [34].

En general, los métodos basados en el modelo Euleriano, además de permitir la obtención de predicciones cuantitativas, son capaces de describir fases sólidas y líquidas simultáneamente, y poseen el potencial para ser aplicados a situaciones fuera de equilibrio. Dentro de las desventajas se puede mencionar que, estos métodos sólo pueden representar las características físicas del sistema en términos de promedios, con lo cual el detalle de las colisiones no está contenido en las ecuaciones que representan los campos y, por lo tanto, no es posible caracterizar los efectos generados por los arcos, o los debido a efectos producidos a escala microscópica.

### 2.1.3. Métodos basados en redes

Existe un tercer grupo de métodos que ha sido aplicado al estudio de los sistemas granulares. En éstos, la posición espacial de las partículas está determinada por una red subyacente. Además, los movimientos son representados a través de saltos entre sitios vecinos, ubicados dentro de esta red, los que dependen de una cierta probabilidad definida de antemano. Por otro lado, todos los vectores de velocidad poseen las misma magnitud, estando su orientación restringida a algunos valores dentro de un conjunto discreto de posibilidades, el que depende de la geometría de la red utilizada. La interpenetración entre partículas es

evitada impidiendo que dos de ellas ocupen un mismo sitio en la red simultáneamente. Las colisiones, la fricción y la rugosidad se modelan mediante la introducción de reglas, como por ejemplo, una probabilidad de captura basada en la velocidad de la partícula, para representar la fricción. Es decir, si la probabilidad de saltar es menor que un cierto valor umbral, entonces la partícula queda atrapada en el sitio. Algunos de los métodos que han sido aplicados al estudio de los medios granulares son los siguientes:

- Autómatas celulares [53, 54].
- **LGA**, **L**attice **G**as **A**utomata [41, 73–76].
- **LBM**, **L**attice **B**oltzmann **M**odels [77].
- Métodos de camino aleatorio (Random-walk) [42].

Aunque, estos métodos incluyen reglas que no necesariamente tienen relación con los fenómenos físicos involucrados, en cierta forma, son capaces de reflejar el comportamiento de un sistema granular con bastante aproximación. Dentro de sus ventajas se puede mencionar que, su implementación es muy sencilla y pueden ser aplicados tanto a situaciones dinámicas como estáticas. Por otro lado, sus desventajas incluyen el no poder incorporar en detalle la fricción ni la rugosidad, la limitación en las orientaciones que puede tomar la velocidad y el tratar sólo una colisión por vez. Tampoco es posible incluir fluidos en la descripción del sistema. Sin embargo, la mayor crítica que reciben estos métodos, es el hecho que no necesariamente están basados en principios físicos, dificultando, de esta manera, la interpretación de los resultados.

## 2.2. Dinámica de contactos

El método de la dinámica de contactos fue desarrollado por Moreau y Jean [49] durante los años 80, con el fin de enfrentar el problema de las irregularidades matemáticas encontradas al modelar sistemas mecánicos, en los cuales se toma en cuenta la restricción de mútua impenetrabilidad de las partículas. Esta restricción genera saltos en el valor de la velocidad, cada vez que ocurren colisiones entre partículas, lo que se traduce en discontinuidades en las aceleraciones. A diferencia de otros métodos, como el de *elementos discretos* o el de *dinámica*

*molecular*, que resuelven este problema regularizando matemáticamente el sistema a través de la definición de una fuerza de interacción, la dinámica de contactos trata el sistema a nivel de las velocidades, evitando de esta forma, la introducción de una ley de interacción. Este método consiste en determinar, las velocidades y reacciones después de una colisión, a partir de las velocidades y reacciones conocidas, antes de dicha colisión, de manera tal de satisfacer en forma simultánea, la conservación del momentum total y las leyes de contacto, las que tienen relación con la impenetrabilidad de las partículas y la fricción mutua entre ellas.

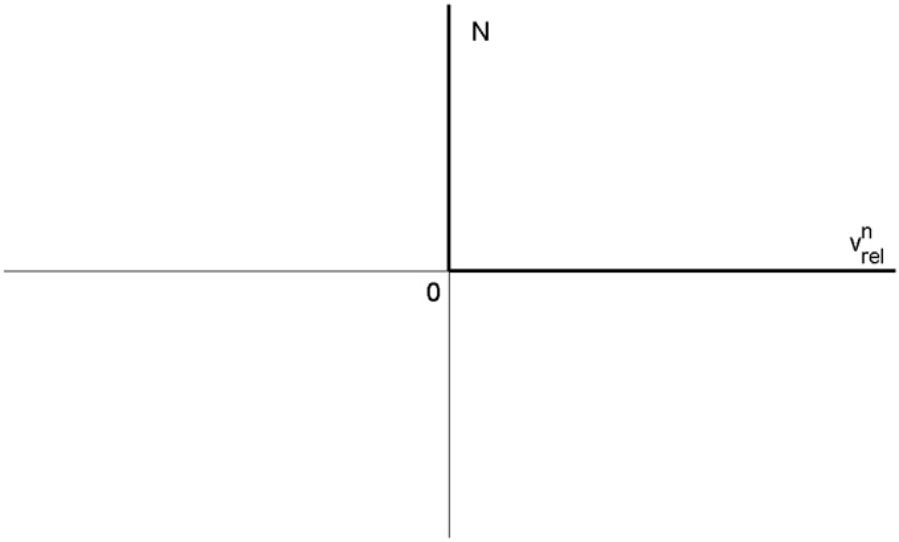


Figura 2.1. Gráfico de Signorini también conocida como condición de unilateralidad en el modelo de partículas duras.

### 2.2.1. Leyes de contacto

Dos leyes de contacto son necesarias en el modelo de partículas duras [45]: la condición de unilateralidad y la ley de fricción de Coulomb. La condición de unilateralidad, representada a través del gráfico de Signorini, expresa la condición necesaria para prevenir la interpenetración de las partículas involucradas en una colisión. De esta forma, cuando la velocidad relativa normal $v^n_{rel}$ es positiva, la reacción normal $N$ es nula. Es decir, cuando las partículas no se tocan no existe reacción normal. Por el contrario, si las partículas están en contacto, la velocidad relativa normal es cero y la reacción normal toma un valor lo suficien-

temente alto de manera de impedir la interpenetración, ver Fig. 2.1. Por otro lado, la ley de fricción de Coulomb, representa la fuerza de roce que resiste el deslizamiento mutuo entre las partículas que colisionan. De esta forma, si la velocidad relativa tangencial $v^t_{rel}$ es distinta de cero aparece una fuerza $|T| = \mu N$, que resiste el deslizamiento. Mientras que, cuando la velocidad relativa tangencial es nula, el valor de esta fuerza se encuentra en el intervalo definido por $-\mu N \leq T \leq \mu N$, donde $\mu$ representa el coeficiente de roce característico para las partículas y $N$ la fuerza de reacción normal.

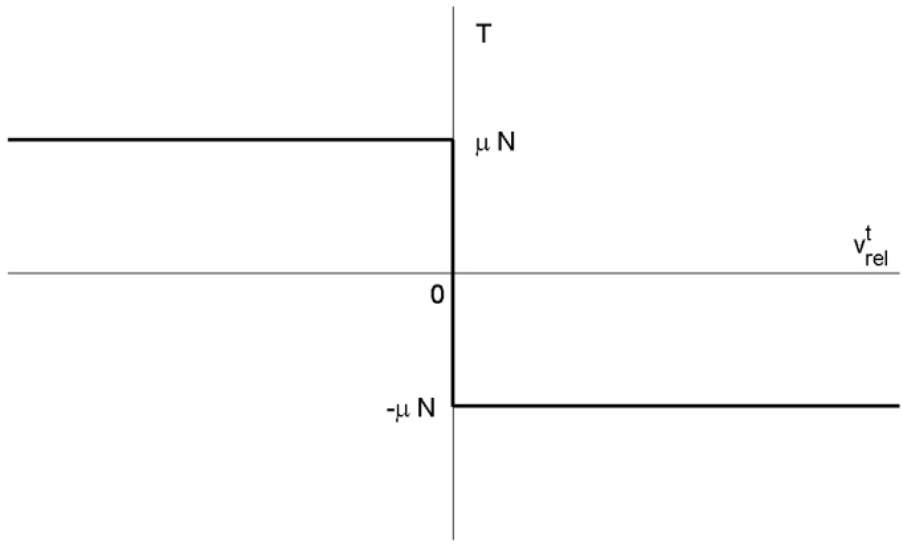


Figura 2.2. Ley de fricción de Coulomb. La fuerza de fricción que se opone al deslizamiento es proporcional a la fuerza normal $N$ ejercida durante la colisión.

### 2.2.2. Colisiones

En sistemas con un gran número de partículas, confinadas en una región finita del espacio, los contactos entre aquellas pueden ser destruídos y creados muchas veces durante la evolución del sistema, dando origen a cambios repentinos en la velocidad de las partículas, no sólo en las zonas cercanas al evento, sino que también en lugares apartados de éstas, lo que se traduce en interacciones de carácter no local. Por lo tanto, cualquier perturbación al interior del sistema puede ser propagada a cualquier punto de éste, o bien al sistema en su totalidad. Es claro que, mientras más rígidas sean las partículas más violentos serán los cambios en la

velocidad, haciendo que las fuerzas de contacto alcancen valores muy altos. En el límite en que las partículas son perfectamente rígidas, los cambios en las velocidades son discontinuos. Esta es la razón principal por la que, en los métodos que resuelven las ecuaciones de Newton, es necesario introducir una regularización. Esto se traduce en la incorporación de una ley de interacción, que de cuenta de las fuerzas involucradas en las colisiones.

Como el método de la dinámica de contactos describe el sistema a nivel de las velocidades, no es necesario entonces, la incorporación de una ley de interacción que describa las colisiones entre partículas. Sin embargo, aún subsiste una dificultad, la que se relaciona con la forma en la cual están conectadas las velocidades antes y después de una colisión. Moreau y Jean [49] han solucionado este problema introduciendo unas nuevas velocidades, construidas promediando en forma ponderada las velocidades antes y después de una colisión. Así, estas nuevas velocidades vienen dadas por:

$$\overline{v}_i^n = \frac{1}{1+\rho_n} v_i^{n+} + \frac{\rho_n}{1+\rho_n} v_i^{n-} \tag{2.1}$$

$$\overline{v}_i^t = \frac{1}{1+\rho_t} v_i^{t+} + \frac{\rho_t}{1+\rho_t} v_i^{t-}, \tag{2.2}$$

donde $\rho_n$ y $\rho_t \in [0,1]$ son los denominados coeficientes de restitución normal y tangencial, $v_i^{n-}$, $v_i^{t-}$ y $v_i^{n+}$, $v_i^{t+}$ las componentes normal y tangencial de la velocidad antes y después de la colisión respectivamente.

### 2.2.3. Ecuaciones de transferencia

Las ecuaciones de transferencia nos permiten relacionar las fuerzas de reacción normal y tangencial, en el punto de contacto entre dos partículas, con el resto de las fuerzas que están actuando sobre ellas, en un mismo instante. La intersección entre las ecuaciones de transferencia y las leyes de contacto ocurre en un único punto, ver Figs. 2.3 y 2.4, lo que permite remover la degeneración contenida en estas leyes y encontrar los valores de la velocidad y las fuerzas de reacción. Para determinar las ecuaciones de transferencia se debe escribir las ecuaciones de conservación del momentum lineal y angular. De esta forma, en un sistema homogéneo compuesto de discos bidimensionales, se tiene que, para la partícula *i- ésima* en contacto con un conjunto de partículas etiquetadas por $k$, los momentos lineal y angular se escriben como:

$$m_i(\vec{v}_i^+ - \vec{v}_i^-) = \sum_k \left(\vec{R}_{ik}^n + \vec{R}_{ik}^t\right) \tag{2.3}$$

$$I_i(\vec{\omega}_i^+ - \vec{\omega}_i^-) = \sum_k \vec{r}_i \times \vec{R}_{ik}^t, \tag{2.4}$$

donde $m_i$ es la masa de la partícula, $I_i$ su momento de inercia y $r_i$ su radio. Las velocidades lineal y angular están representadas por $\vec{v}_i$ y $\vec{\omega}_i$ respectivamente. El superíndice $-$ indica el estado antes de la colisión y el superíndice $+$ el estado después de la colisión. Por otro lado, $\vec{R}_{ik}^n$ y $\vec{R}_{ik}^t$, son los impulsos producidos por las fuerzas de impacto que ocurren durante las colisiones, proyectadas en sus componentes normal y tangencial respectivamente. La dirección normal está determinada por la línea que une los centros de las partículas que colisionan. Mientras que, la dirección tangencial se orienta perpendicular a esta última. De manera análoga se puede escribir las ecuaciones para la partícula *j- ésima* en contacto con las partículas de índice $l$. Finalmente, introduciendo las velocidades propuestas por Moreau y Jean, Ecs. 2.1 y 2.2 y despejando los impulsos normal y tangencial, para la interacción entre las partículas $i$ y $j$, se obtienen las ecuaciones de transferencia[1], las que vienen dadas por:

$$\begin{aligned} R_{ij}^n &= m_{ij}^n(1+\rho_n)\overline{v}_{ij}^n + A_{ij}^n \\ R_{ij}^t &= m_{ij}^t(1+\rho_t)\overline{v}_{ij}^t + A_{ij}^t. \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde $m_{ij}^n$, $m_{ij}^t$ son las masas reducidas normal y tangencial, $\overline{v}_{ij}^n$, $\overline{v}_{ij}^t$ las velocidades ponderadas relativas y $A_{ij}^n$ y $A_{ij}^t$ los términos que contienen el efecto del resto de partículas involucradas en la colisión y que están en contacto, ya sea, con la partícula $i$, la $j$ o bien ambas. Estos términos pueden ser considerados como un campo medio producido por las partículas que rodean a las consideradas directamente en la colisión. Se debe mencionar que, los términos $A_{ij}^n$ y $A_{ij}^t$ son independientes de $\overline{v}_{ij}^n$ y $\overline{v}_{ij}^t$ y de $R_{ij}^n$ y $R_{ij}^t$. Entonces, las ecuaciones de transferencia, relacionan las fuerzas entre las partículas $i$ y $j$ con el resto de fuerzas que actúan sobre ellas. Nótese que, las reacciones $R_{ij}^n$ y $R_{ij}^t$ son funciones lineales de las velocidades $\overline{v}_{ij}^n$ y $\overline{v}_{ij}^t$, en el espacio n-dimensional determinado por el número de contactos activos. En consecuencia, las ecuaciones de transferencia pueden ser representadas como líneas rectas, en este espacio de dimensión $n$, en función de las velocidades relativas. Así, al graficarlas junto con las leyes

[1]Para los detalles algebraicos véase el apéndice A.

de contactos, es posible obtener una solución única para el sistema de ecuaciones 2.5, mediante la intersección de las ecuaciones de transferencia y las leyes de contacto, en todos los contactos activos simultáneamente, ver Figs.2.3 y 2.4. La obtención de la solución a este sistema de múltiples ecuaciones, se realiza mediante un proceso iterativo basado en el algoritmo de Gauss-Seidel, ver Ref. [78], cuya característica principal es su capacidad de convergencia. Aunque, esta ventaja se ve perjudicada por el incremento en el número de iteraciones necesarias para alcanzar un error relativamente pequeño. Este factor se vuelve crítico a medida que aumenta el número de ecuaciones, el que depende directamente del número de partículas presente en el sistema.

### 2.2.4. Algoritmo para la dinámica de contactos

La intersección entre las ecuaciones de transferencia y las leyes de contacto, permite determinar las nuevas configuraciones del sistema a medida que transcurre el tiempo, ver Figs. 2.3 y 2.4. El proceso de carácter iterativo requiere conocer una configuración inicial, definida por los valores de las velocidades de las partículas y las reacciones en cada contacto activo. El algoritmo que ha sido considerado en nuestro caso, consiste de los siguientes pasos:

1. Fijar los valores de: los parámetros $\mu$, $\rho_n$ y $\rho_t$, el número de pasos a ejecutar, $N$ y el intervalo de tiempo por paso, $dt$.

2. Fijar una configuración inicial, por ejemplo con $v_i^n = v_i^t = 0$ y $R_{ik}^n = R_{ik}^t = 0$.

3. Calcular las velocidades ponderadas a través de las ecuaciones 2.1 y 2.2.

4. Avanzar medio paso de tiempo $dt/2$, dejando que las partículas evolucionen por efecto de las fuerzas externas, y determinar los vecinos de cada partícula. Además, de los contactos activos.

5. Avanzar medio paso de tiempo $dt/2$, suponiendo que, los contactos activos detectados en el paso anterior, no cambian de estado. Es decir, no hay detrucción ni creación de nuevos contactos.

6. Determinación de los puntos de intersección entre las ecuaciones de transferencia 2.5 y las leyes de contacto, para todos los contactos activos simultáneamente. Esto se realiza mediante el método de Gauss-Seidel.

7. Una vez que se ha alcanzado el criterio de error prefijado, se calculan, la velocidad de cada partícula y las fuerzas de reacción en cada contacto activo, determinándose de esta forma, una nueva configuración válida para el sistema.

8. Tomando como configuración inicial, la nueva configuración obtenida en el paso 7, se vuelve a repetir el proceso desde el paso 3, hasta que se haya completado el ciclo de $N$ iteraciones.

9. Finalizar el proceso.

El único parámetro que permite controlar la convergencia del proceso iterativo, es el intervalo de tiempo $dt$. Se debe notar que, mientras más pequeño sea el paso de tiempo, mayor será la precisión en la detección de los contactos activos y, en consecuencia, menor será el error en la determinación de las nuevas configuraciones. Sin embargo, la disminución del error, se traduce en un incremento en el tiempo computacional, necesario para reproducir el intervalo de tiempo total considerado. Luego, existe un compromiso entre la precisión deseada y el tiempo computacional disponible. Por otra parte, también es posible considerar como ajustables, a los parámetros ligados a las propiedades de disipación del sistema, fricción $(\mu)$ y restitución $(\rho_n, \rho_t)$. Aun cuando, estos pueden ser determinados independientemente a través de experimentos. El uso del método de Gauss-Seidel, en la determinación de los puntos de intersección antes mencionados, se basa en la propiedad de convergencia de este método. En efecto, el método de Gauss-Seidel siempre converge. Sin embargo, la velocidad de convergencia decrece muy rápidamente cuando el número de ecuaciones que deben resolverse aumenta.

A partir de este algoritmo, se ha desarrollado un código computacional que será aplicado al estudio numérico, tanto del flujo de granos en un reloj de arena como a la segregación por tamaño en un sistema granular sometido a vibración, los que serán presentados en los capítulos 3 y 4 respectivamente.

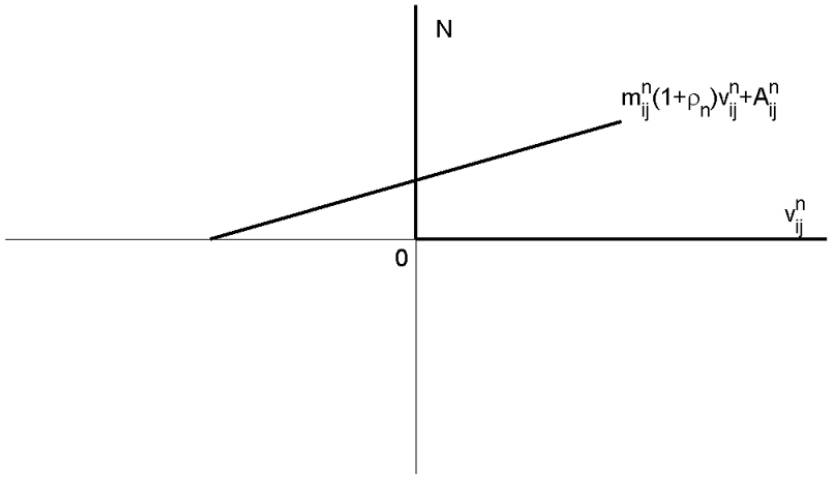


Figura 2.3. Intersección entre la ecuación de transferencia normal y la ley de Signorini.

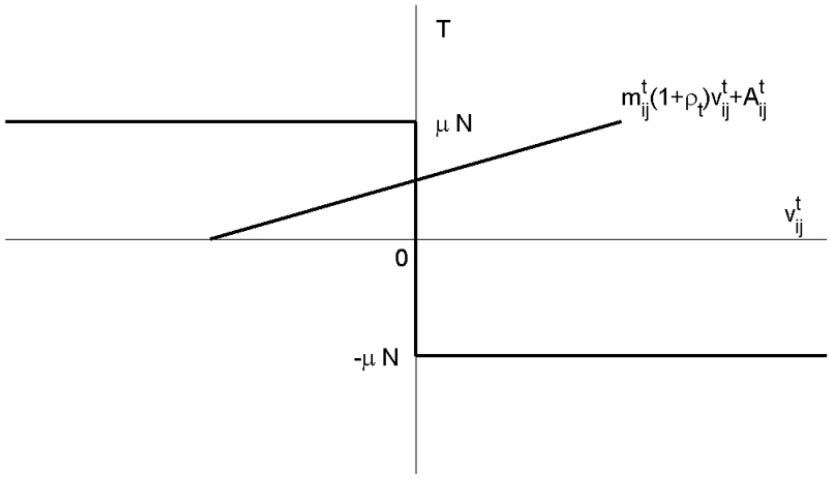


Figura 2.4. Intersección entre la ecuación de transferencia tangencial y la ley de fricción de Coulomb.

# CAPÍTULO 3: FLUJO EN UN RELOJ DE ARENA BIDIMENSIONAL

En este capítulo se describen las características del flujo gravitacional, en un sistema compuesto por discos cilíndricos contenidos en un reloj de arena, confinado a dos dimensiones. La caracterización ha sido realizada mediante experimentos y simulaciones numéricas, basadas en el método de la dinámica de contactos, ver Cap. 2. Los resultados experimentales, junto con determinar el efecto producido por los parámetros macroscópicos (longitud de la apertura y ángulo de inclinación) son, además, empleados en la validación de los resultados provenientes de las simulaciones numéricas. Una vez que los resultados numéricos han sido validados, se determina, a través de éstos, la influencia de los parámetros microscópicos (fricción y restitución) sobre el flujo granular.

## 3.1. Introducción

Como ha sido mencionado con anterioridad, los materiales granulares han recibido gran atención por parte de investigadores de diversas áreas del quehacer científico y tecnológico, debido a la importancia que tienen estos materiales en los procesos aplicados en diversas industrias, tales como la agricultura, la minería y la industria farmacéutica [1, 2]. También, presentan una gran diversidad de fenómenos importantes, como la convección, la propagación de esfuerzos y sonido y los muchos flujos de interés práctico que aún no han sido comprendidos cabalmente. Una de las dificultades encontradas en la comprensión de estos fenómenos radica en el comportamiento singular que muestran los materiales granulares. En general, los granos pueden fluir aparentemente como los líquidos, sin embargo, son capaces de soportar esfuerzos de corte como lo haría un cuerpo sólido. Otro factor importante, es el papel desempeñado por la red de fuerzas generada por los contactos entre las partículas, la

que juega un rol preponderante en el comportamiento dinámico de estos materiales, tal como puede verse en los flujos de granos encontrado en muchos silos de descarga, cuando una partícula grande se mueve en un medio de partículas más pequeñas [79, 80] o en el movimiento convectivo, observado en sistemas granulares sometidos a vibración en presencia de aire [24]. En principio, los flujos de material granular pueden ser descritos por modelos hidrodinámicos, siempre que el tamaño característico del contenedor sea mucho más grande que el tamaño de los granos presentes, ya que en este caso las fluctuaciones de las propiedades, tales como la velocidad, son mucho menores que los valores medios de dichas cantidades. Un ejemplo típico de este regimen se puede observar en el flujo gravitacional de material granular en los silos de descarga. Siguiendo la aproximación hidrodinámica, para flujos a gran escala, se puede ver que existen dos límites bien definidos, llamados límite viscoso e inercial. El primero de ellos se obtiene cuando la fuerza de gravedad es compensada por una viscosidad efectiva. Sin embargo, desde los tiempos de Bagnold [81], es aceptado el hecho de que no existe una viscosidad intrínseca en los materiales granulares, tal como ocurre en los gases diluidos. Bagnold [81] sugirió que, el tensor de esfuerzos viscosos a primer orden es una función cuadrática de la velocidad local, $\sigma \sim d^2(\partial v/\partial x)^2$. De esta manera, cuando es incluida la gravedad se obtiene la ley del flujo medio de Bagnold, dada por $\bar{v} \sim \sqrt{gD^3}/d$, donde $D$ representa el tamaño característico del contenedor y $d$ el de las partículas. Este regimen no ha sido observado experimentalmente. En cambio, cuando la gravedad es compensada por la inercia, usualmente descrita por el término convectivo en la ecuación de transporte, se tiene que la velocidad media típica viene expresada como $\bar{v} \sim \sqrt{gD}$, la cual es sólo función del tamaño característico del contenedor, independientemente del tamaño de los granos. Este regimen, a diferencia del regimen viscoso, ha sido observado experimentalmente para una amplia variedad de materiales granulares [1]. Por otra parte, se debe recordar que, para un fluido simple, la escala de longitud característica es el nivel de fluido $H$, con lo cual se puede escribir la velocidad media como $\bar{v} \sim \sqrt{gH}$. Este hecho marca una notoria diferencia entre los fluidos y los materiales granulares, lo que ha sido corroborado a través de la observación del comportamiento de la razón de flujo de masa, llevada a cabo en muchos experimentos. En términos simples, la velocidad de salida de un fluido depende del nivel del mismo al interior del contenedor, mientras que, en los materiales granulares esta velocidad es independiente del nivel de granos existente. Esto grafica el hecho de por qué un "reloj de arena" es de arena

y no de agua, por ejemplo. Muchos modelos teóricos han sido desarrollados con el fin de explicar esta profunda diferencia. La mayoría de las primeras predicciones teóricas, acerca de la razón de flujo de masa, estañ basadas en el concepto de *arco en caída libre*[1]. Sin embargo, no ha podido ser encontrada evidencia experimental que verifique su existencia. Este arco, correspondería a una superficie que limita dos zonas del flujo y que se ubicaría en las cercanías de la salida del sistema. De esta forma, todas las partículas localizadas sobre esta superficie estarían consideradas en contacto con otras y, por lo tanto, sometidas a esfuerzos de compresión. Por otra parte, bajo esta superficie las partículas dejarían de estar en contacto y podrían acelerar libremente bajo la acción de la fuerza de gravedad. Para una revisión acerca del concepto de *arco en caída libre* y algunas de las dificultades que se encuentran para su aplicación ver Ref. [2] y las referencias allí mencionadas. En la teoría, generalmente aceptada, del reloj de arena[2], se supone que el *arco en caída libre* es una superficie esférica, sobre la cual la componente radial del tensor de esfuerzos $\sigma_{rr}$ se anula. En otras palabras, las partículas son libres para acelerar sobre una distancia efectiva $D$ y, por lo tanto, la escala natural para la velocidad a la salida viene dada por $\bar{v} \sim \sqrt{gD}$, con $D$ la longitud de la apertura del sistema. No obstante, se debe mencionar que, cuando la longitud $D$ es unas pocas veces más grande que el tamaño de las partículas $d$, es de esperar que la aproximación hidrodinámica al flujo deje de ser válida, principalmente, porque las fluctuaciones en el sistema granular se vuelven tan grandes como los valores medios, impidiendo de esta forma la separación de escalas que se da en forma natural en los fluidos normales.

## 3.2. Configuración experimental

En el estudio experimental del flujo granular, confinado a dos dimensiones, se ha empleado un reloj de arena compuesto por un marco metálico, el que soporta dos placas de vidrio paralelas separadas mediante unas barras de acero móviles de $7mm$ de espesor, las que actúan como las paredes laterales del reloj. El espacio entre las placas fue llenado con alrededor de $800$ granos cilíndricos de $6mm$ de diámetro y $6{,}3mm$ de largo, los que fueron obtenidos a partir de una hoja de material fotoelástico[3] mediante un proceso de corte en frío.

[1] Del inglés *free-fall arch*.

[2] Ver por ejemplo Cap. 10 en Ref. [2].

[3] $PSM-4$ The Measurement Group Inc., $30 \times 30cm^2$ y un coeficiente $C = 0{,}9psi/fr/in$

Estos granos tienen la capacidad de cambiar el estado de polarización, de la luz incidente, cuando son sometidos a deformación. En una de las caras, de cada uno de los granos, fue pintado un círculo concéntrico para facilitar el proceso de seguimiento de éstos. Por otra parte, la visualización de la distribución de esfuerzos fue lograda con la ayuda de un polariscopio circular [82], ver Fig. 3.1.

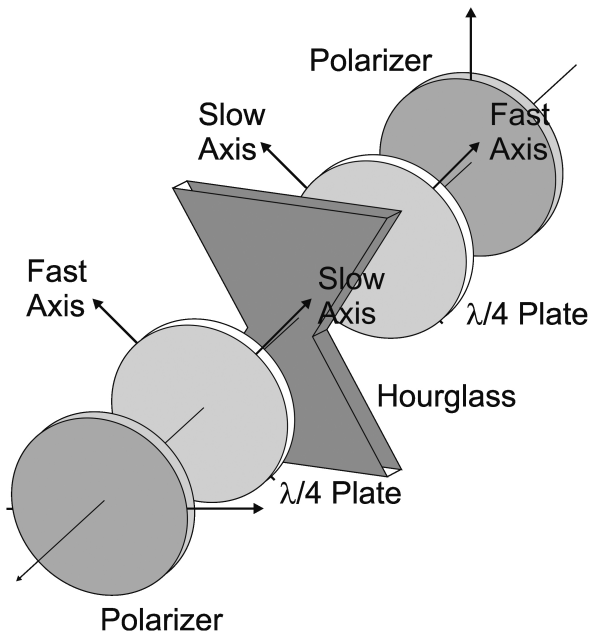


Figura 3.1. Esquema que muestra la configuración utilizada en un polariscopio circular. Este sistema esta compuesto básicamente por dos polaroides y dos láminas retardadoras de cuarto de onda $(\lambda/4)$. Estas láminas son materiales que poseen dos índices de refracción, por lo que la luz se propaga al interior de ellas con dos velocidades distintas. De esta forma, los ejes "fast axis" y "slow axis" representan las direcciones de mayor y menor velocidad de propagación, respectivamente. Para más detalles ver por ejemplo la Ref. [82].

Las características del material fotoelástico y las condiciones de iluminación empleadas, nos permiten asegurar que la intensidad obtenida es proporcional a la diferencia entre los esfuerzos principales[4] $I \sim (\sigma_1 - \sigma_2)^2$ y conseguir una sensibilidad, en la detección de las

[4]Esta fórmula es válida cuando la diferencia de fase entre los rayos recombinados es pequeña, $\Delta = 2\pi hC(\sigma_1 - \sigma_2)/\lambda$, donde $C$ es el coeficiente del material, $h$ la longitud de los cilindros y $\lambda$ la longitud de onda de la luz incidente. En la configuración de campo oscuro esto se logra seleccionando el material fotoelástico de tal forma que la primera extinción corresponda al máximo esfuerzo. De esta forma, se puede observar el esfuerzo

fuerzas, del orden de $mg$, donde $m$ es la masa de un grano. Además, la masa $190mg$ y velocidad $30cm/s$ características de los granos, hacen posible despreciar los efectos producidos por el aire circundante.

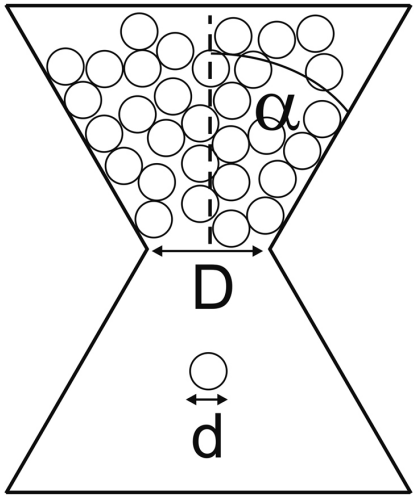


Figura 3.2. Esquema del reloj donde se muestran los parámetros experimentales.

Los cambios en la distribución de esfuerzos, así como la trayectoria de las partículas, fueron registrados mediante un sistema de grabación de imágenes rápido ,con una velocidad máxima de captura de $1220$ cuadros por segundo y una resolución temporal de $0{,}8ms$, lo que permite registrar un mínimo de $600$ cuadros para el tiempo de descarga más corto. Con la combinación de lentes utilizada fue posible alcanzar un campo visual efectivo de alrededor de $10 \times 10cm^2$. A través del uso de técnicas de procesamiento digital de imágenes y de algoritmos de seguimiento de partículas pudieron ser determinadas tanto la distribución espacial de fuerzas como la trayectoria individual de cada partícula y, a través de ésta, su velocidad y aceleración. Los parámetros de control considerados para este sistema son, la razón entre la longitud de la apertura y el diámetro de los granos $\eta \equiv D/d$ y el ángulo de inclinación de las paredes laterales $\alpha$, cuyos rangos de variación están ubicados entre $4 - 14$ y $5° - 40°$ respectivamente, ver Fig. 3.2.

En este punto se debe notar que, la fricción a la que los granos están sometidos, producto del contacto con las placas de vidrio, puede ser disminuida considerablemente manteniendo el sistema en forma vertical, de manera de reducir las fuerzas laterales al mínimo.

en escala de grises.

Además, como medida complementaria, se puede aumentar la distancia de separación entre las placas, teniendo cuidado de no separarlas demasiado para evitar que los cilindros roten fuera del plano. Con estas medidas, se logra reducir la fricción lo suficiente como para despreciarla.

## 3.3. Características del flujo y efecto de los arcos

A medida que las partículas fluyen bajo la acción de la fuerza de gravedad, es posible observar claramente una red intermitente de fuerzas de contacto. Esta red se hace visible cada vez que se tienen cadenas lineales de cilindros comprimidos unos contra otros. Dos clases de cadenas pueden ser identificadas, las que serán llamadas *cadenas extendidas* y *arcos*. En general, la red de fuerzas de contacto está compuesta por una superposición de *arcos* y *cadenas extendidas*, las que se mezclan entre sí. Todas las cadenas lineales de cilindros comprimidos, que nacen a partir de una de las paredes del reloj y que se propagan a lo largo de éste sin alcanzar la pared opuesta, corresponderán a las *cadenas extendidas*. Por otro lado, cada vez que ambas paredes del reloj sean alcanzadas por los extremos de una cadena extendida, se estará en presencia de un *arco*. Se ha observado que, los arcos pueden presentarse de manera aislada o bien soportando alguna carga vertical sobre ellos, ver Figs. 3.3b y 3.3c. También es posible encontrar situaciones en las que no existe interacción alguna, tal como se muestra en la Fig. 3.3a. La principal característica presentada por el flujo, es la alternancia entre situaciones en las que no hay interacciones visibles, con otras que contienen un número significativo de cadenas. Claramente, cuando no hay interacciones, las partículas se mueven libremente bajo la influencia de la gravedad, mientras que, las interacciones al interior del sistema son la manifestación de un estado de compresión. En consecuencia, el comportamiento de la red de fuerzas de contacto refleja, en cierta forma, los períodos de expansión y compresión al que está siendo sometido el sistema granular. Efectivamente, estos estados pueden ser observados a través de una velocidad característica, la que representa el movimiento de todo el conjunto de partículas. Considérese como velocidad representativa, el promedio espacial de la componente vertical de la velocidad de las partículas $\langle v_y \rangle_{\vec{x}}$, determinado sobre una región definida por el ancho de la apertura del reloj y la altura del campo visual $D \times H$. Al graficar

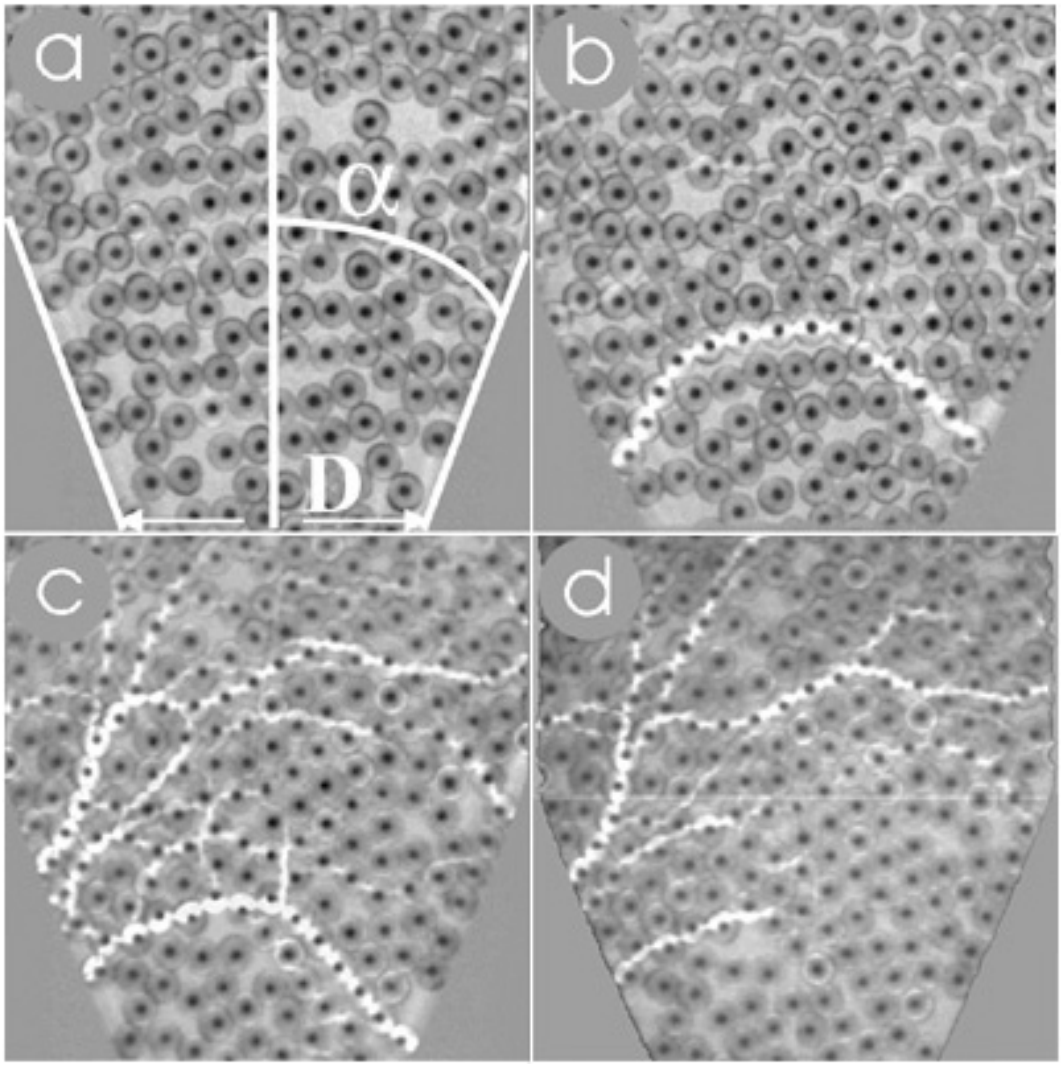


Figura 3.3. Secuencia de fotos que muestran las distintas configuraciones de fuerzas, observadas durante el flujo de partículas bajo la acción de la gravedad, los parámetros utilizados son, $\alpha = 25°$ y $\eta = 5$. $(a)$ Flujo en ausencia de cadenas de fuerza. $(b)$ Arco aislado. $(c)$ Arco sometido a carga vertical y cadenas extendidas. $(d)$ Cadenas extendidas.

esta velocidad en función del tiempo, medido en unidades de $\tau \equiv \sqrt{d/g}$[5], se puede observar, claramente, la presencia de fluctuaciones, de magnitud tan grande como el valor medio, tal como se muestra en el panel superior de la Fig. 3.4. Temporalmente, estas fluctuaciones pueden ser escaladas por $\sqrt{D/g}$, lo que es consistente con una escala de velocidad dada por $v \sim \sqrt{gD}$, válida para un regimen inercial.

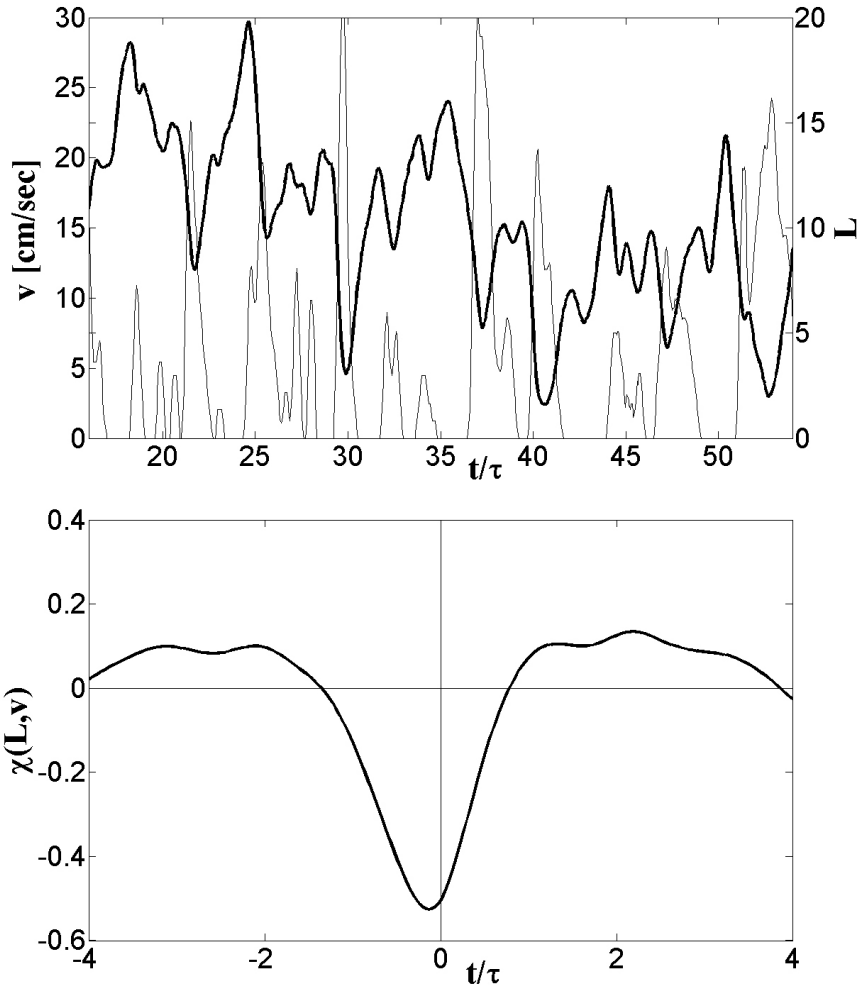


Figura 3.4. Panel superior, $\langle v_y \rangle_{\vec{x}}$ (línea gruesa) y $L$ como función de $t/\tau$ para $\eta = 5$ y $\alpha = 40°$. Panel inferior, correlación cruzada entre $\langle v_y \rangle_{\vec{x}}$ y $L$.

A partir de las secuencias de imágenes, no es posible apreciar una correlación directa entre las fluctuaciones de la red de fuerzas de contacto y la velocidad representativa del sistema granular. Con el fin de poder contrastar ambos comportamientos, se hace necesario represen-

[5]Donde $d$ es el diámetro de las partículas y $g$ la aceleración de gravedad.

tar, mediante alguna característica, la evolución de la red de fuerzas de contacto, tal como fue hecho con la velocidad del sistema. Una posibilidad es determinar el esfuerzo total al interior del sistema. Sin embargo, debido a la baja resolución de las imágenes, no es posible obtener los esfuerzos a partir de ellas. En consecuencia, se ha considerado una caracterización menos precisa, la cual consiste en determinar la longitud total, $L$, de las cadenas existentes en cada imagen.

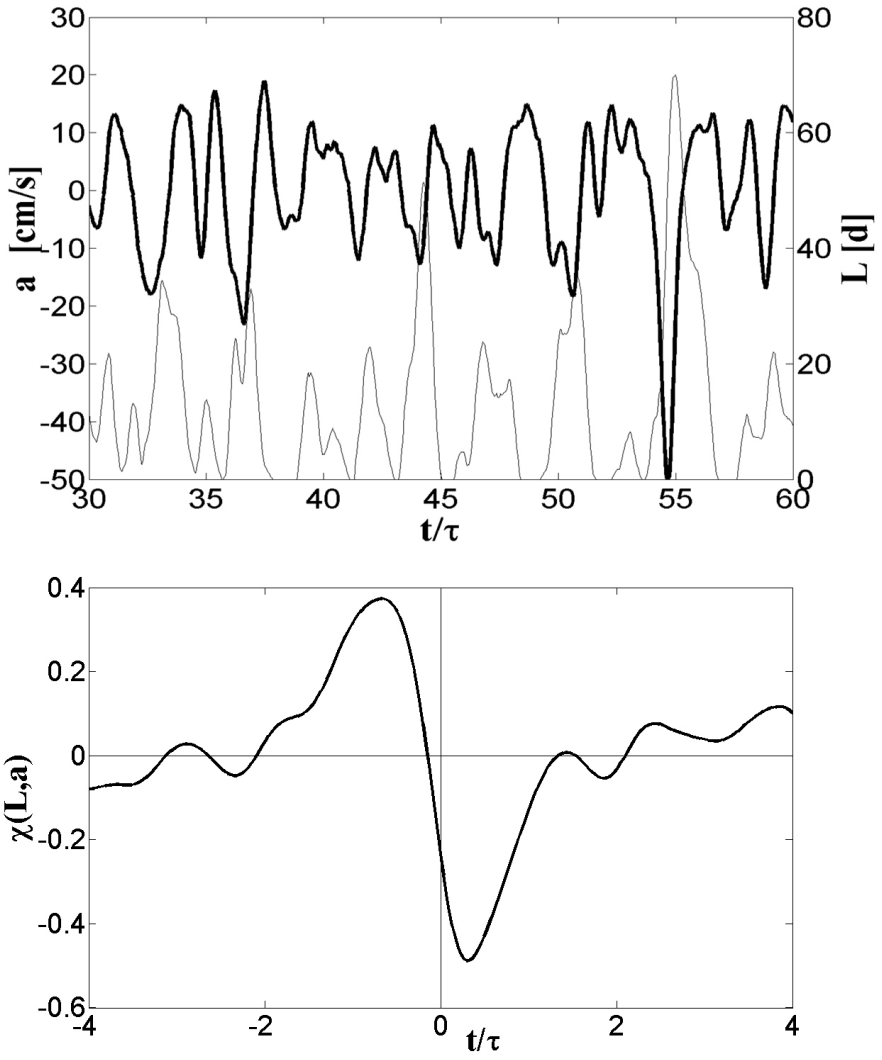


Figura 3.5. Panel superior, $\langle a_y \rangle_{\vec{x}}$ (línea gruesa) y $L$ como función de $t/\tau$ para $\eta = 5$ y $\alpha = 40°$. Panel inferior, correlación cruzada entre $\langle a_y \rangle_{\vec{x}}$ y $L$.

Esto se consigue contabilizando el número total de cilindros que cambian el estado de pola-

rización de la luz incidente, producto de la deformación generada por la interacción mutua entre ellos. En cierta medida, esta cantidad representa la fuerza total ejercida sobre las paredes. Al comparar la evolución temporal de la velocidad representativa y la longitud de las cadenas, se puede observar que cada disminución violenta en la velocidad está precedida por un fuerte incremento en la longitud de las cadenas presentes y viceversa. Este comportamiento es confirmado por la correlación cruzada entre ambas cantidades $\chi(L, v)$, ver panel inferior de la Fig. 3.4. Los valores de los coeficientes de correlación son determinados a través de $\chi(L, v) = R_{Lv}(m - N)$, donde

$$R_{Lv}(m) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-m-1} L_{n+m} v_n^* & m \geq 0 \\ R_{Lv}^*(-m) & m < 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

donde $m = 1, ..., 2N - 1$ y el símbolo $*$ indica el complejo conjugado. De esta forma, queda reflejada la íntima relación existente entre las fluctuaciones en la velocidad del sistema y la intermitencia en la red de fuerzas de contacto. Aunque la aceleración promedio también está correlacionada con la longitud total de las cadenas de fuerza, en términos relativos es mucho más importante la correlación que presenta esta longitud con la velocidad promedio, tal como puede ser apreciado al comparar las Figs. 3.4 y 3.5. Así, cuando el sistema se está expandiendo, las partículas caen libremente, acelerando bajo la influencia de la fuerza de gravedad, y por lo tanto, ninguna interacción es observada. Mientras que, cuando el sistema se encuentra en el estado de compresión, el número de cadenas de fuerza aumenta rápidamente, haciendo que el sistema comience a disipar la energía cinética, acumulada durante el período de expansión. En otra palabras, las fluctuaciones en la velocidad, producto de la red de fuerzas de contacto, puede ser entendida como un mecanismo colectivo capaz de controlar el flujo de salida de granos. Es importante mencionar que, la magnitud de las fluctuaciones, comparada con el valor medio de la velocidad representativa, disminuye, considerablemente, a medida que la longitud de la apertura es aumentada o bien el ángulo de inclinación es reducido, lo que se traduce en una correlación de menor magnitud. Una estimación de la importancia relativa que tienen los arcos y las cadenas extendidas, sobre el flujo, puede ser calculada a través del tiempo de vida medio y de la probabilidad de ocurrencia. Para determinar el tiempo de vida medio, se ha promediado los tiempos en los que han permanecido visibles los arcos y las cadenas. Por otra parte, la probabilidad de ocurrencia ha sido deter-

minada contando el número de veces que aparecen los arcos o cadenas, en una secuencia completa, y dividiendo este valor por el número total de cuadros presentes en ésta. Los valores típicos, obtenidos para el tiempo de vida medio y la probabilidad de ocurrencia son, $28ms$ y $0{,}7$ y $8ms$ y $0{,}3$, para las cadenas extendidas y los arcos respectivamente. En consecuencia, es claro que, en los flujos gravitacionales desarrollados, la red de fuerzas de contacto está compuesta principalmente por cadenas extendidas, debido a que, tanto su tiempo de vida medio como su probabilidad de ocurrencia son de mayor magnitud. Tal como ha sido mencionado anteriormente, el concepto de *arco en caída libre* ha jugado un rol preponderante, tanto en las primeras predicciones teóricas del flujo de masa por unidad de tiempo, como en la explicación de la diferencia en el escalamiento de la velocidad media que existe entre los fluidos y los medios granulares.

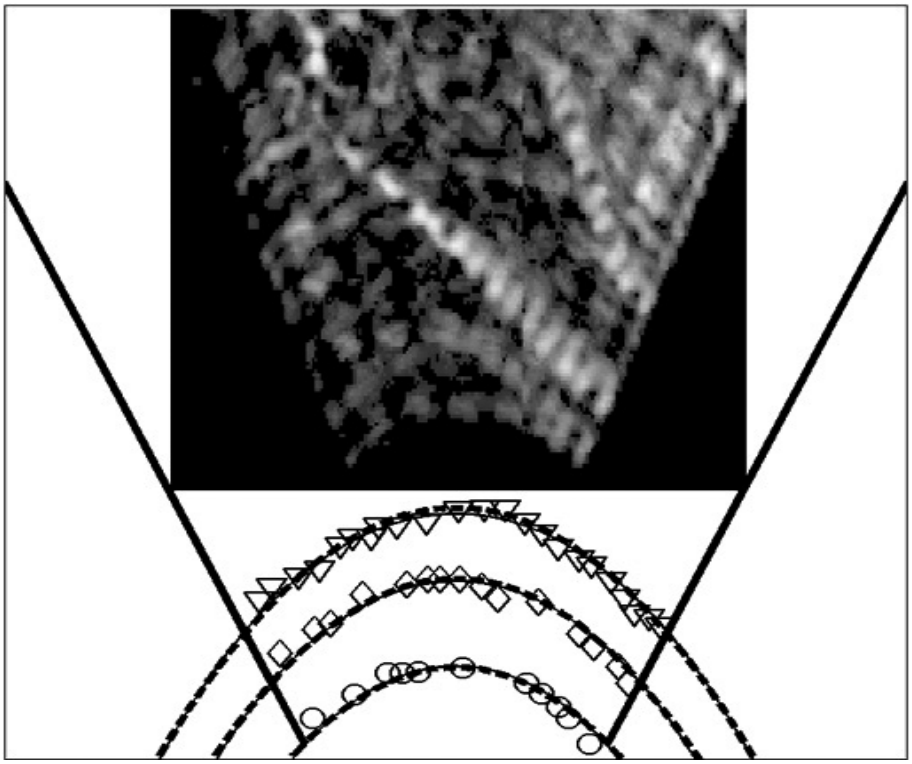

Figura 3.6. Ajuste utilizando una curva catenaria al *arco en caída libre* dinámico, $\eta = 5, 6, 7$ y $\alpha = 30°$. Los datos han sido representados en un reloj genérico, de manera tal que $\eta$ aumenta al desplazarse hacia arriba en el gráfico. Recuadro, promedio temporal de la red de fuerzas de contacto, el que muestra la existencia de un *arco en caída libre* dinámico.

La existencia de dicho arco no ha podido ser confirmada experimentalmente. De hecho, nues-

tras secuencias de imágenes no muestran ninguna evidencia de la presencia de un arco permanente en las cercanías de la salida del reloj, ni siquiera en el caso de flujos muy lentos[6]. Sin embargo, al tomar el promedio de la red de fuerzas de contacto, a lo largo de una secuencia completa, es posible observar, en forma clara, la presencia de dos zonas diferentes, las cuales están delimitadas por una frontera que se asemeja a un arco. Arriba de esta frontera el esfuerzo promedio tiene una magnitud distinta de cero, lo que refleja la interacción entre las partículas, mientras que, en la región ubicada entre esta frontera y salida del reloj, el esfuerzo promedio es prácticamente nulo. Esto permitiría acelerar libremente a los granos, por efecto de la gravedad, tal como se muestra en la Fig. 3.6. Nótese que, este arco también ha sido observado en el caso de flujos lentos controlados, ver Fig. 3.8. En términos de promedios, esta frontera puede ser identificada como un *arco en caída libre*. Por otra parte, es posible representar este arco como una curva catenaria, ver por ejemplo las Refs. [83–85]. Esta curva puede ser escrita como

$$z = z_0 - k \cosh\left(\frac{x - x_0}{k}\right), \tag{3.2}$$

donde $z_0$ es la altura máxima alcanzada por la catenaria, $x_0$ es la posición del centro de la curva y $k \equiv dF_h/P$, con $F_h$ la fuerza horizontal y $P$ el peso de una partícula. Como se puede ver en la Fig. 3.6, un buen ajuste de la curva catenaria a la curva experimental se consigue para un valor de $k/d \sim 4$, para $\eta = 5, 6, 7$ y $\alpha = 40°$.

## 3.4. Flujo cuasiestático

En los experimentos anteriores, se ha observado que las fluctuaciones presentes en el flujo dependen de la velocidad. Es interesante, entonces, preguntarse cuáles serán las características cuando el sistema se mueve muy lentamente. Para tal efecto, se ha modificado la configuración experimental agregando un pequeño bloque de metal, el cual es desplazado en forma vertical mediante un motor, ver el esquema de la Fig. 3.7. Con este sistema es posible conseguir velocidades del orden $0{,}68 cm/s$ e incluso menores, cerca de $1000$ veces más pequeña que la menor de las velocidades caracteríticas de los flujos gravitacionales. En este caso, las secuencias de imágenes muestran una mayor densidad de cadenas y arcos, que en

[6]Flujos controlados del orden de $1500$ veces más lentos que los flujos gravitacionales

caso del flujo gravitacional no controlado, ver panel superior izquierdo de la Fig. 3.8. Efectivamente, la reducción en la velocidad de salida de los granos disminuye drásticamente las fluctuaciones en la red de contactos. Sin embargo, la dinámica de esta red sigue siendo de gran complejidad, por ejemplo, los cambios en la distribución de las cadenas de contactos pueden ocurrir de manera muy rápida, prácticamente en forma discontinua. Otra característica observada, es el deslizamiento de los granos sobre las paredes laterales, lo que permite que la estructura de cadenas de contactos se mantenga por un tiempo mayor que en el caso del flujo no controlado, dando una distribución de contactos promedio bastante homogénea, tal como se muestra en el panel inferior izquierdo de la Fig. 3.8. Al igual que en el caso del flujo gravitacional libre, el promedio temporal de la red de contactos muestra la presencia de un arco que separa dos regiones, una con alta densidad de contactos y otra libre de éstos.

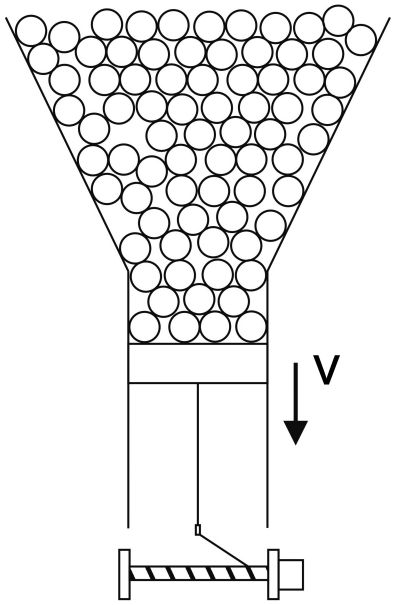


Figura 3.7. Esquema que muestra las modificaciones introducidas en la configuración experimental para controlar la velocidad de descenso de las partículas.

Además, este promedio temporal indica la presencia de movimiento lateral de las partículas, en una zona reducida en el centro del sistema. Siendo el movimiento de éstas, en general, de carácter radial, ver panel inferior izquierdo de la Fig. 3.8. Es importante mencionar que, en el flujo controlado, el sistema no sólo presenta una mayor tendencia a formar arcos, sino que

también a mantenerlos durante un mayor tiempo. Esto se explica, en parte, por la reducción en las fluctuaciones, lo que diminuye la dilatación al interior del sistema, permitiendo aumentar la estabilidad de las cadenas. Como se verá en la sección siguiente, la rugosidad de las paredes laterales aumenta el movimiento lateral de las partículas, cambiando la estructura del promedio temporal de la red de cadenas de contactos, ver panel inferior derecho de la Fig. 3.8.

## 3.5. Efecto de la rugosidad de las paredes

Los resultados que han sido mencionados anteriormente, corresponden básicamente a un sistema con paredes lisas. Para determinar si la presencia de rugosidad en éstas, tiene alguna influencia en el comportamiento de la dinámica del sistema, se ha aumentado de manera artificial la rugosidad de las paredes del reloj, a través de la adhesión de partículas de acrílico cortadas por la mitad. Estas partículas corresponden a mitades de cilindros de $6{,}3mm$ de largo, en dos diámetros distintos, $0{,}6mm$ y $0{,}8mm$, las que fueron distribuidas de manera aleatoria en ambas paredes. A primera vista, se puede observar que las configuraciones de la red de fuerzas de contacto, en un instante de tiempo dado, presentan características muy similares al caso sin rugosidad, ver panel superior de la Fig. 3.8. Sin embargo, al tomar el promedio temporal de estas distribuciones, se aprecia una diferencia importante. En efecto, cuando las paredes son lisas, las partículas que están apoyadas sobre éstas tienen la posibilidad de deslizar, aún cuando formen parte de un arco y estén sometidas a compresión. Esto se ve reflejado en una distribución más homogénea de intensidad luminosa, la que también muestra en forma clara el deslizamiento de las partículas, ver la imagen del lado izquierdo en el panel inferior de la Fig. 3.8. En cambio, la mayor rugosidad introducida por las mitades de partículas impide el deslizamiento a lo largo de la pared. Esto hace que, el movimiento de las partículas esté condicionado al espacio disponible que les permita pasar por sobre las adheridas a la pared. Es decir, es necesario que el sistema se dilate lo suficiente para permitir este desplazamiento, lo que genera dos regiones de distinto comportamiento, una en la parte central del sistema granular, en donde el movimiento es principalmente radial y otra cercana a las paredes, en donde predomina un movimiento perpendicular a éstas. Se debe recalcar que, en ambas situaciones es posible observar claramente el *arco en caída libre* promedio. Es facti-

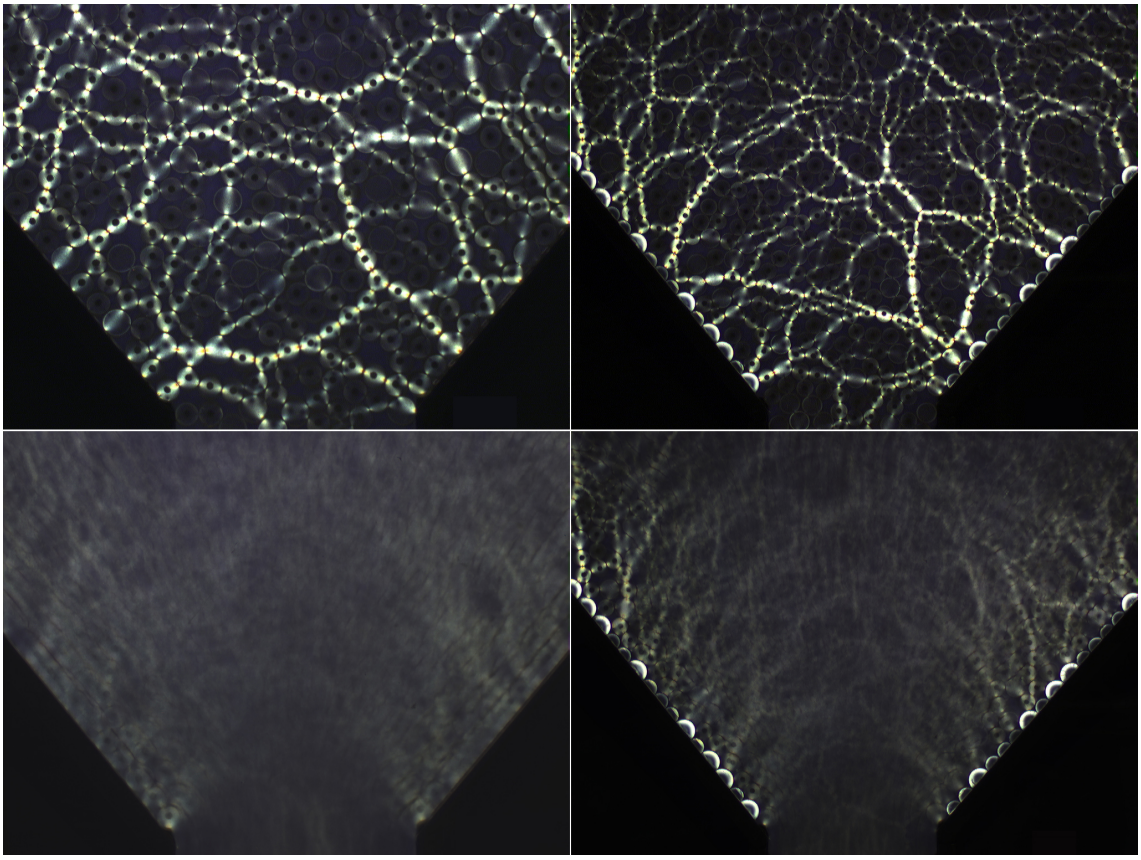

Figura 3.8. Panel superior, red de fuerzas de contacto típica observadas en flujos muy lentos bajo control externo. Panel inferior, *arco en caída libre*, obtenido mediante el promedio de todos los cuadros contenidos en la secuencia del flujo mostrado en el panel superior, para $\eta = 10$ y $\alpha = 40°$. En este caso el sistema se mueve a una velocidad aproximada de $v \sim 0{,}68 cm/s$, que es del orden de unas $30$ veces inferior a la menor de las velocidades características, obtenida en un flujo gravitacional sin control. Las imágenes del lado izquierdo corresponden a un sistema cuyas paredes laterales son lisas, mientras que, las del lado derecho son paredes rugosas, obtenidas mediante la adhesión de partículas cortadas por la mitad.

ble suponer que, mientras mayor sea la rugosidad en la superficie de las paredes más grande será la probabilidad de generar arcos estables cerca de la salida del reloj, incrementándose la posibilidad de bloqueo del sistema. Además, el campo de velocidades promedio también presentará algunas diferencias, sobre todo en la componente radial, la que sería nula sobre las paredes, para el caso con rugosidad no nula. A diferencia de lo que ocurre con las paredes lisas, en donde tiene un valor finito mayor que cero.

## 3.6. Velocidad y flujo a la salida

En la sección anterior se ha mostrado el fuerte enlace que existe entre las fluctuaciones en la velocidad promedio y la intermitencia de la red de fuerzas de contacto, observada durante la evolución temporal del sistema granular. Ahora, se verá el comportamiento del flujo a la salida del reloj, en un sistema con paredes lisas. Se acostumbra a medir el flujo de masa por unidad de tiempo o razón de flujo de masa, ya que éste es más fácil de medir. Esta cantidad ha sido medida con buena precisión, en diversas configuraciones para distintos tipos y tamaños de granos y es considerada como una cantidad apropiada para ser comparada con las predicciones teóricas, para resultados sobre una amplia gama de condiciones ver por ejemplo la Ref. [28]. Aunque, la determinación de la razón de flujo de masa, mediante el conteo del número de partículas que cruza la salida del reloj por unidad de tiempo, es relativamente simple, éste no entrega información respecto de la dinámica interna del sistema granular. En consecuencia, con el fin de obtener, tanto la razón de flujo de masa a la salida, como alguna idea acerca del comportamiento del sistema granular, se ha adoptado una aproximación diferente. De esta manera, será determinada la razón de flujo de masa a partir del campo de velocidades medio, a través de

$$W = \int \rho \vec{v} \cdot \hat{r} dl, \tag{3.3}$$

donde $\vec{v}$ representa la velocidad y $dl$ un elemento de arco cercano a la apertura. Para simplificar la manipulación algebraica, se ha representado la posición de las partículas en coordenadas cilíndricas, tomando como origen el ápice virtual formado por la prolongación de las paredes del reloj. Luego, el valor promedio de las componentes radial y angular de la

velocidad, es determinado tomando un promedio sobre una ventana móvil de área aproximadamente igual a $9d^2$, donde $d$ es el diámetro de las partículas.

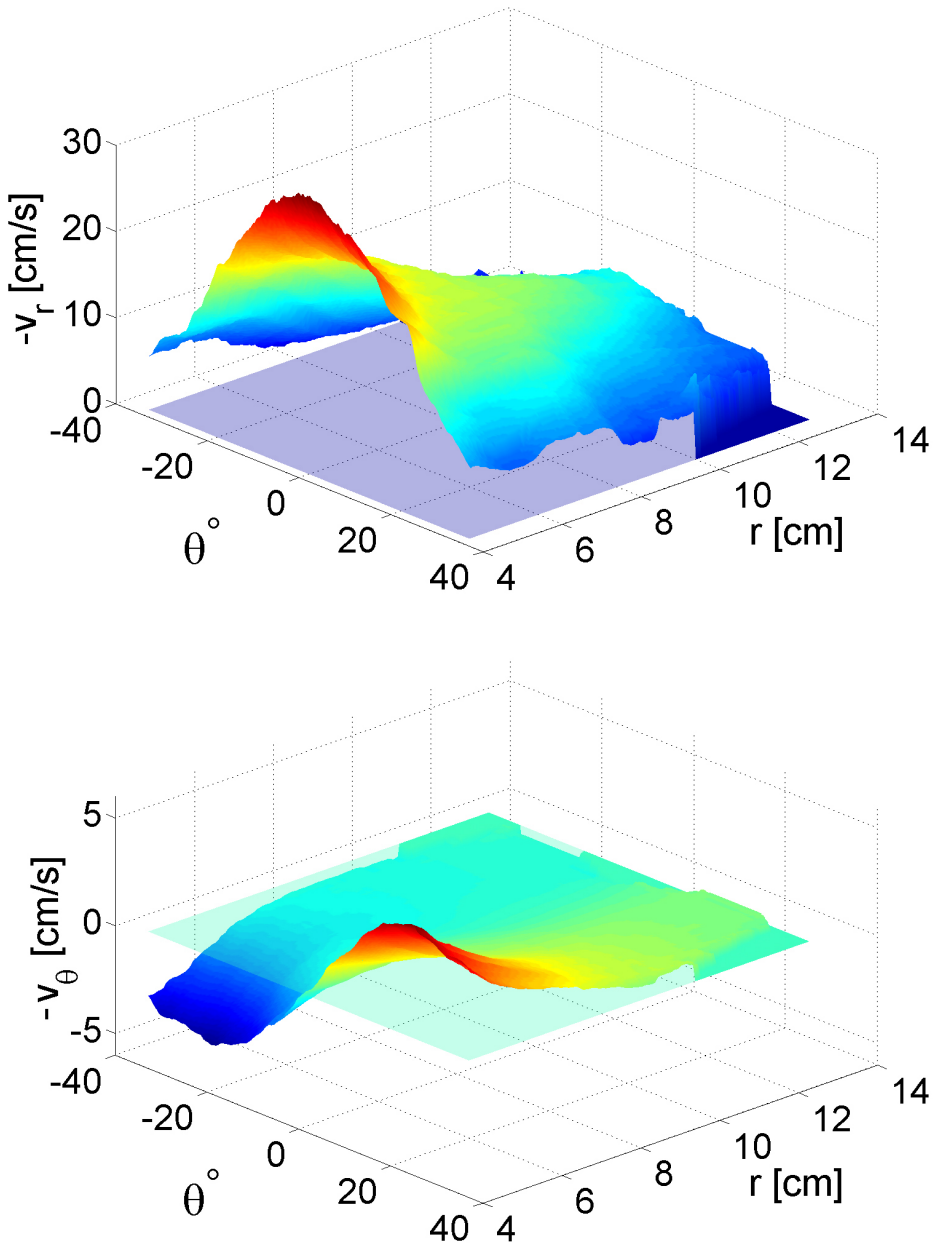


Figura 3.9. Panel superior, representación tridimensional del campo de velocidades radial promedio. Panel inferior, representación similar para el campo de velocidades angular medio. En este caso, el sistema considerado tiene paredes lisas.

Es fácil ver, a partir de la Fig. 3.9, que las componentes de la velocidad media pueden ser mo-

deladas por funciones armónicas. En efecto, cortando las superficies de velocidad en forma paralela a la coordenada angular, se tiene que cada uno de estos cortes admite las siguientes funciones de ajuste:

$$\begin{aligned} v_r(r,\theta) &= A_r(r)\cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right) + B_r(r) \\ v_\theta(r,\theta) &= A_\theta(r)\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right) + B_\theta(r), \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde $\alpha$ es el ángulo de inclinación de las paredes del reloj.

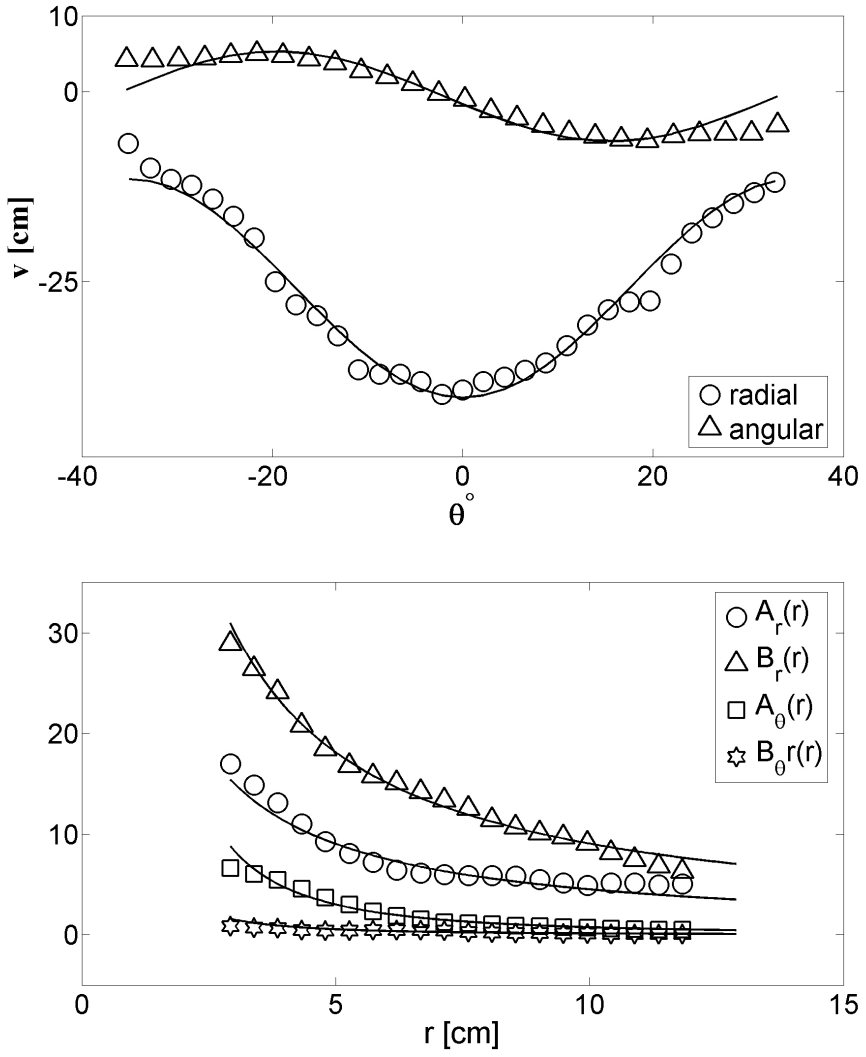


Figura 3.10. Panel superior, dependencia angular de las componentes de la velocidad. Panel inferior, comportamiento de los parámetros de ajuste $A_r(r)$, $B_r(r)$, $A_\theta(r)$ y $B_\theta(r)$ como función de $r$.

Estas velocidades deben cumplir con las siguientes condiciones de borde:

$$\begin{aligned} v_r(r, \theta = \pm\alpha) &= f(r) \\ v_\theta(r, \theta = \pm\alpha) &= 0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

La forma funcional de $f(r)$ no es impuesta a priori, más bien es determinada por el proceso de ajuste a los valores experimentales. De esta manera, una vez que los coeficientes $A_r(r)$, $B_r(r)$, $A_\theta(r)$ y $B_\theta(r)$ han sido determinados, se puede obtener el comportamiento radial de las componentes de la velocidad. Tal como se muestra en el panel inferior de la Fig. 3.10, la dependencia de $A_r(r)$ y $B_r(r)$ con el radio es del tipo $1/r$. De manera análoga se tiene que, $A_\theta(r)$ y $B_\theta(r)$ decaen como $1/r^2$, por consiguiente, las componentes del campo de velocidades pueden ser escritas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} v_r(r, \theta) &= \frac{1}{r}\left[A_r^0 \cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right) + B_r^0\right] \\ v_\theta(r, \theta) &= \frac{1}{r^2} A_\theta^0 \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Así, la expresión para la razón de flujo de masa a la salida se transforma en

$$\begin{aligned} W &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho \left[\frac{1}{r}\left[A_r^0 \cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right) + B_r^0\right]\right] r_0 d\theta \\ &= 2\rho\alpha B_r^0, \end{aligned} \tag{3.7}$$

donde $r_0 \equiv D/2 \sin\alpha$ es el radio medido desde al ápice virtual hasta la apertura del reloj. Por otro lado, la velocidad radial máxima a la salida está dada por

$$v_r(r_0, 0) = \frac{1}{r_0}\left[A_r^0 + B_r^0\right]. \tag{3.8}$$

Repitiendo este procedimiento para las diferentes combinaciones de $\eta$ y $\alpha$ es posible obtener una regla de escalamiento, tanto para la razón de flujo de masa como para la velocidad radial máxima a la salida. En efecto, como se observa en la Fig. 3.11, en ambos casos, la mayor parte de los puntos experimentales pueden ser acomodados en una sóla curva. Al graficar $W/2\alpha\rho$ en función de $r_0$ se puede observar que esta curva tiene la forma

$$\frac{W}{2\alpha\rho} = c(r_0 - r_0^c)^{3/2}, \tag{3.9}$$

donde $c \sim \sqrt{g/2}$ y $r_0^c$, representa un valor crítico para el radio $r_0$ en el cual el sistema es bloqueado en forma permanente, de tal manera que no se observa flujo de salida.

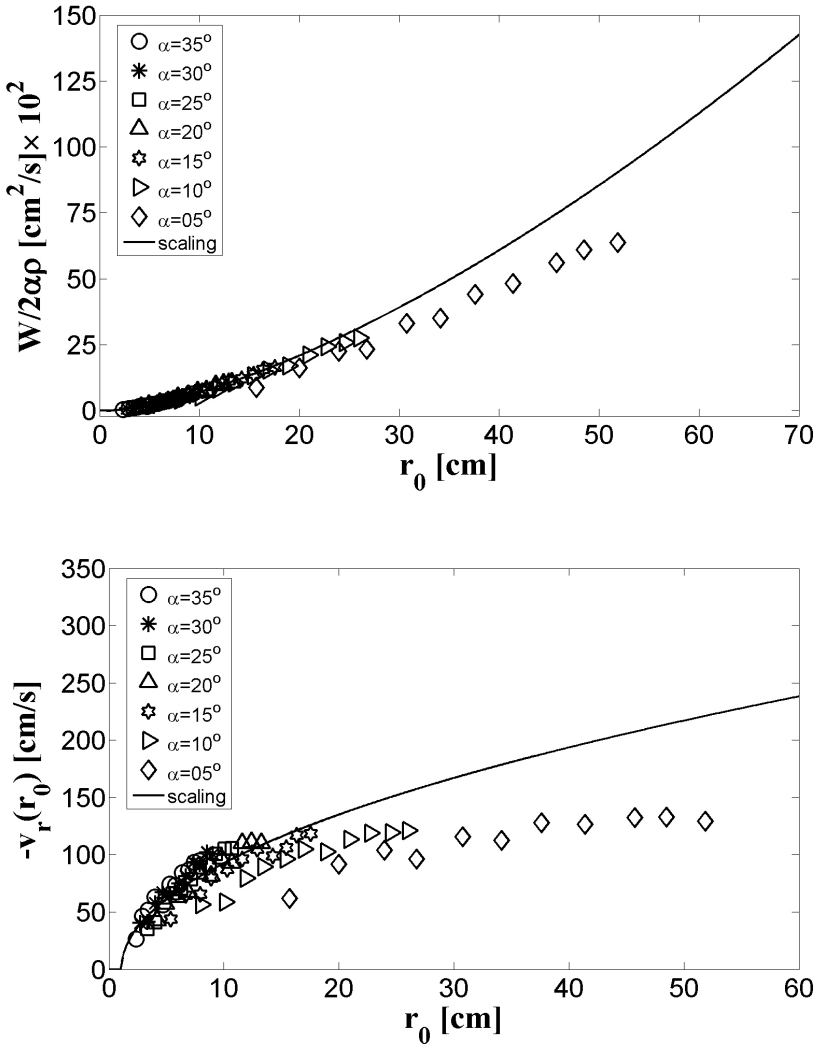


Figura 3.11. Panel superior, razón de flujo de masa por unidad de ángulo y de densidad a la salida del reloj como función de $r_0$. Panel inferior, dependencia de la velocidad radial máxima a la salida del reloj con $r_0$.

Análogamente, se tiene que la velocidad radial máxima a la salida puede representarse a

través de la función

$$v_r(r_0, 0) = c(r_0 - r_0^c)^{1/2}, \tag{3.10}$$

aquí $c \sim \sqrt{g}$ y $r_0^c$ es aproximadamente el mismo radio crítico obtenido con anterioridad. En este caso, el radio crítico tiene un valor aproximado de $r_0^c \sim 1{,}1cm = 1{,}8d$. Debido a la cantidad de partículas en el sistema, para algunas configuraciones sólo fue posible obtener información en la zona transiente, lo que significa que el sistema aún se encontraba en la etapa de aceleración sin alcanzar un flujo desarrollado. Esta es la razón principal por la cual los puntos experimentales, obtenidos en las configuraciones con $\eta$ grande y $\alpha$ pequeño, se sitúan lejos de la curva de ajuste. Este efecto es mucho más notorio en la velocidad a la salida del reloj, tal como se muestra en el panel inferior de la Fig. 3.11. Reemplazando el radio por $r_0 = D/2\sin\alpha$ e introduciendo la apertura crítica $D^c \equiv \delta d = 2r_0^c \sin\alpha$ las curvas de escalamiento pueden ser escritas de la siguiente forma:

$$W = 2\rho\sqrt{\frac{g}{2}}\,(D - D^c)^{3/2}\,\frac{\alpha}{2\sin^{3/2}\alpha} \tag{3.11}$$

$$v_r(r_0, 0) = \sqrt{\frac{g}{2}}\,(D - D^c)^{1/2}\,\frac{1}{\sin^{1/2}\alpha}. \tag{3.12}$$

En el caso de configuraciones de silo cilíndrico, la razón de flujo de masa puede escribirse como $f(D - \delta d)$, donde el término $\delta d$ es interpretado como una zona alrededor de la salida que no está disponible para el flujo de partículas, usualmente se conoce con el nombre de concepto de anillo vacío, ver [2, 28]. Claramente, nosotros estamos considerando un sistema tipo silo cónico, confinado a dos dimensiones. A pesar de esta diferencia, es importante hacer notar que la expresión para el escalamiento de la razón de flujo de masa, Ec. 3.11, presenta una dependencia funcional similar, salvo que, en este caso la interpretación para el término $\delta d$ es diferente. Se debe recordar que, se ha interpretado este término como una longitud crítica para la apertura, bajo la cual el sistema permanecería bloqueado en forma permanente. El valor obtenido para el parámetro de ajuste es $\delta \sim 1{,}8$, el que está en buen acuerdo con el valor $\delta \sim 1{,}4$ obtenido por Beverloo et al [28], registrado para una amplia gama de granos. Una de las características, mencionada anteriormente, es el carácter intermitente del flujo, el

cual se ve reflejado en el comportamiento de la velocidad media, ver Fig. 3.4. Se debe agregar que estas fluctuaciones son, en gran medida, el producto de la existencia de una componente angular de la velocidad. De esta forma, si el ángulo de inclinación de las paredes es grande, esta componente de la velocidad se torna más sensible al cambio en la longitud de la apertura, disminuyendo en forma apreciable para aperturas mayores a $\eta = 7$. Por el contrario, para ángulos pequeños es prácticamente independiente de este valor. En cambio, se observa una dependencia fuerte con respecto al ángulo de inclinación, aun para valores grandes de la apertura. Esto quiere decir que la componente angular de la velocidad y, por consiguiente las fluctuaciones, están influenciadas por la geometría del contenedor. En la Fig. 3.12 se puede ver el efecto que producen los cambio en $\eta$ y $\alpha$ sobre esta componente de la velocidad. La reducción en la componente angular de la velocidad se traduce en fluctuaciones de menor tamaño y, por lo tanto, disminuye la influencia de la red de fuerzas de contacto sobre el movimiento del sistema.

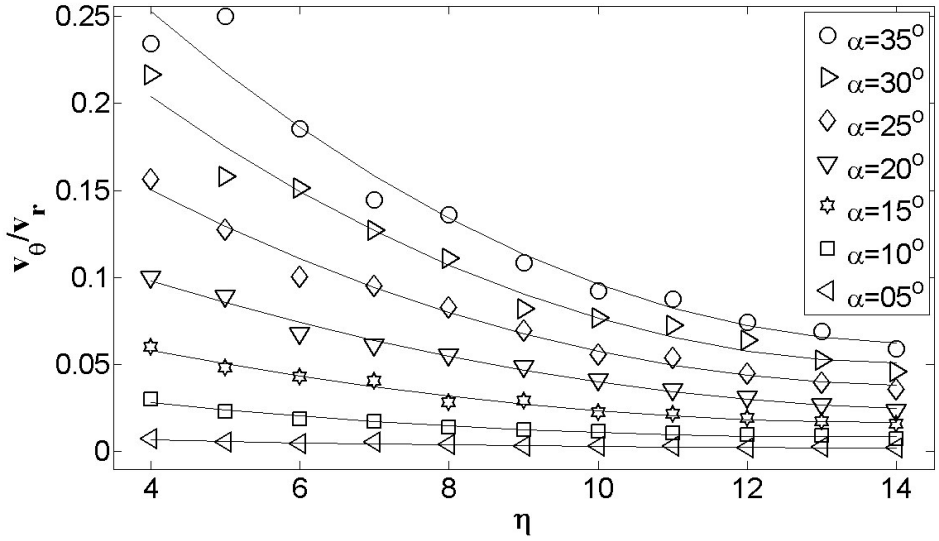


Figura 3.12. Razón entre las componentes angular $v_\theta$ y radial $v_r$ de la velocidad máxima a la salida del reloj. Las líneas continuas sirven de guía para los puntos experimentales y no representan ningún modelo de ajuste en particular.

El efecto es notorio incluso para las aperturas más pequeñas, $\eta = 4$, cuando el ángulo de inclinación es inferior a $\alpha = 20°$.

## 3.7. Arcos y tensor de razón de deformación de corte

En general, se acostumbra a caracterizar el flujo mediante tensores de esfuerzo y de razón de deformación promedios, representación que permite obtener una aproximación bastante aceptable de la dinámica de un sistema, siempre y cuando los movimientos de las partículas y las fuerzas estén distribuidas de manera aproximadamente continua. Sin embargo, el comportamiento de un sistema granular dista bastante de ser continuo y la descripción de los detalles involucrados en la dinámica de éstos, es prácticamente imposible, véase por ejemplo [86]. Como ha sido mencionado con anterioridad, no es posible obtener el valor de los esfuerzos a partir de las imágenes, por lo tanto, nuestra atención estará concentrada en el tensor de razón de deformación de corte promedio. De esta forma, a partir del campo de velocidad promedio Ec. 3.6, volviendo a la representación de coordenadas cartesianas, se puede encontrar el tensor de razón de deformación de corte promedio de la manera usual[7].

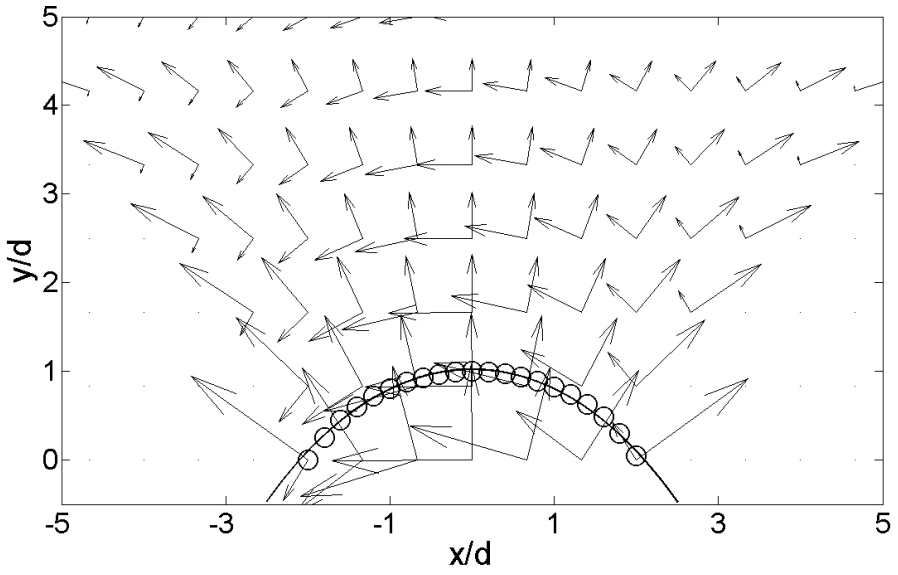


Figura 3.13. Campo con las direcciones principales del tensor de razón de deformación de corte promedio, calculadas a partir de la condición 3.13, junto con el arco calculado a partir de la Ec. 3.14 ($\circ$) y la respectiva curva catenaria de ajuste (línea continua).

Minimizando las componentes fuera de la diagonal del tensor de razón de deformación de corte promedio, respecto del ángulo de rotación, se obtiene la condición que determina las

[7] $\epsilon_{ij} = (1/2)(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i)$. Ver por ejemplo las Refs. [87,88].

direcciones principales. De esta forma, se tiene

$$\tan 2\theta_P = \frac{2\epsilon_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}, \tag{3.13}$$

donde $\epsilon_x = \partial u_x/\partial x$, $\epsilon_y = \partial u_y/\partial y$, $\epsilon_{xy} = (1/2)(\partial u_x/\partial y + \partial u_y/\partial x)$, $u_x$ y $u_y$ son las velocidades en las direcciones $x$ e $y$ respectivamente. Ahora bien, es posible construir una curva que, al igual que los arcos, conecte ambas paredes del reloj, suponiendo que una de las direcciones principales es tangente a ella. Entonces, la ecuación que determina este arco viene dada por

$$\frac{dy}{dx} = \tan\left(\theta_P + \frac{\pi}{2}\right), \tag{3.14}$$

donde $\theta_P$ es calculado a partir de la Ec. 3.13. La solución a esta última ecuación sólo se puede obtener de forma numérica lo que fue llevado a cabo a través del conocido método de Runge-Kutta de cuarto orden [78]. Al igual que los *arcos en caída libre* promedio (Figs. 3.6 y 3.8), el arco así obtenido también puede ser ajustado mediante una curva catenaria, tal como se muestra en la Fig. 3.13. Nótese que, la curva catenaria se ajusta bastante bien al arco calculado y que el valor del parámetro $k/d \sim 4$ es igual al obtenido anteriormente para los *arcos en caída libre* promedio, ver Fig. 3.6. Como ha sido mencionado anteriormente, algunas teorías han utilizado el concepto de *arco en caída libre* para explicar el comportamiento del flujo en silos de descarga. Sin embargo, su existencia no ha sido comprobada experimentalmente. Por otro lado, se puede ver que el tensor de razón de deformación de corte promedio, sugiere una manera natural de crear arcos, siguiendo una de sus direcciones principales. Entonces, es plausible suponer que el sistema trata de producir arcos orientados en esta dirección, los cuales ven frustrada su concreción producto de las fluctuaciones propias del movimiento de los granos. Se debe recordar que, estas fluctuaciones dependen de la velocidad característica del sistema granular y de la geometría del contenedor. Esto explicaría en parte, la mayor cantidad de arcos que pueden ser observados en los flujos lentos controlados, a diferencia de los que pueden apreciarse en los flujos gravitacionales libres. Se debe notar que, los arcos construidos de esta manera representan un arco promedio característico, tal como fue sugerido por Edwards y Mounfield [85], en donde los arcos reales corresponden a fluctuaciones respecto de éste.

## 3.8. Efecto de la fricción y de la restitución

La disipación de energía en un sistema de partículas usualmente es modelada a través de dos parámetros, la fricción $\mu$ y la restitución $\rho_n$ y $\rho_t$. El primer parámetro está conectado con el deslizamiento mutuo entre las partículas, producto de su rotación y el segundo toma en cuenta la pérdida de energía debido a las colisiones entre ellas. Como fue mencionado anteriormente, el estudio del efecto producido por el cambio en estos parámetros está referido a resultados numéricos, obtenidos a partir de simulaciones basadas en el método de la dinámica de contactos. Este método ha demostrado ser muy exitoso en la descripción de algunos fenómenos que ocurren en los medios granulares, en especial en los sistemas de alta densidad, ver por ejemplo [44,89]. En este caso se ha supuesto que las características de las paredes del reloj son similares a las de las partículas. Esto es, en las colisiones entre las partículas y las paredes tanto el coeficiente de fricción como el de restitución toman los mismos valores que en el caso de la interacción entre partículas. Antes de analizar el efecto producido por estos parámetros, es necesario verificar que el método empleado en las simulaciones numéricas es capaz de reproducir de manera adecuada el comportamiento real del sistema granular. Esto fue llevado a cabo utilizando los siguientes valores, $\mu = 0{,}7$ y $\rho_n = \rho_t = 0{,}2$, que corresponden a los valores determinados experimentalmente para los cilindros fotoelásticos. A partir de la Fig. 3.14 se puede observar claramente que el método es capaz de reproducir el comportamiento del sistema, incluyendo el caso en donde no ha sido alcanzado el flujo desarrollado. Sin embargo, una leve diferencia puede ser apreciada en las respectivas curvas de escalamiento, esta diferencia se explica básicamente porque estas curvas son sensibles al valor del coeficiente de fricción tal como será mostrado más adelante. Se observará el efecto producido por el cambio en los parámetros microscópicos a través de las curvas de escalamiento. Para ello, los parámetros serán variados abarcando gran parte del intervalo $[0, 1]$ y considerando como punto de partida la estimación de los valores experimentales $(\mu = 0{,}7, \rho_n = 0{,}2, \rho_t = 0{,}2)$. Esta variación será realizada de dos formas diferentes, una manteniendo constante dos de los tres parámetros y otra en la que ambos coeficientes de restitución varían simultáneamente, tomando el mismo valor mientras la fricción permanece constante. Considérese en primer lugar, el efecto debido a la fricción $(\rho_n = 0{,}2, \rho_t = 0{,}2)$, del panel superior de la Fig. 3.15 se puede ver que la razón de flujo de masa se mantiene inalterada, dentro de los márgenes de error experimental, variando significativamente sólo cuando la fricción alcanza valores rela-

tivamente grandes, cercanos a $\mu = 1$. En cambio, la dispersión en las curvas de la velocidad radial máxima a la salida es mucho mayor, disminuyendo para valores grandes de la fricción y viceversa, ver panel inferior de la Fig. 3.15. Procediendo de manera análoga, esta vez variando el coeficiente de restitución normal ($\mu = 0{,}7, \rho_t = 0{,}2$), observamos que las curvas de razón de flujo de masa, presentan una baja dispersión respecto de la curva experimental, con excepción de la curva generada con los parámetros experimentales.

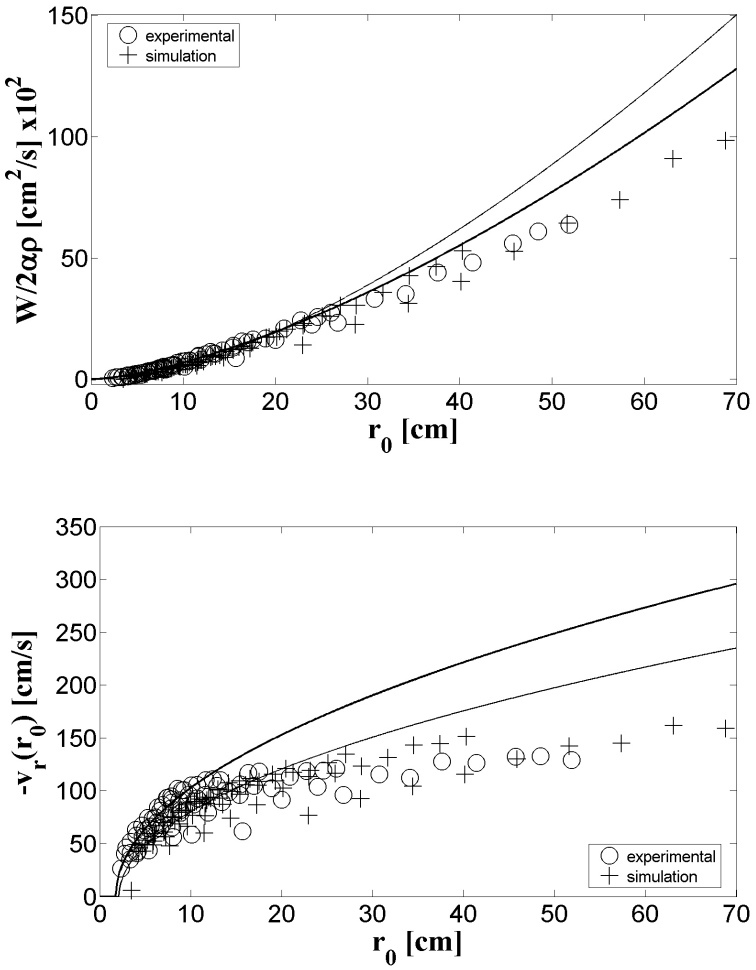


Figura 3.14. Comparación entre los resultados experimentales y los obtenidos mediante las simulaciones, considerando los siguientes valores para los parámetros $\mu = 0{,}7$ y $\rho_n = \rho_t = 0{,}2$. Panel superior, razón de flujo de masa por unidad de ángulo y de densidad a la salida del reloj como función de $r_0$. Panel inferior, dependencia de la velocidad radial máxima a la salida del reloj con $r_0$.

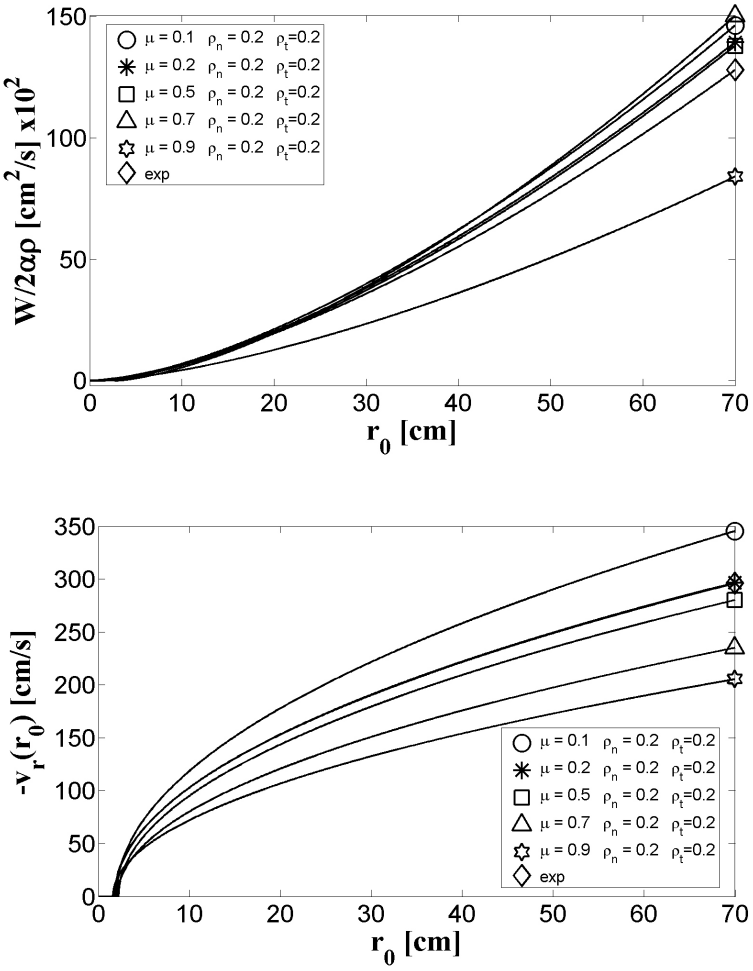


Figura 3.15. Panel superior, efecto de la variación del coeficiente de fricción sobre la razón de flujo de masa. Panel inferior, efecto producido por los cambios en la fricción sobre la velocidad máxima a la salida. $\mu = 0{,}1, 0{,}2, 0{,}5, 0{,}7, 0{,}9$ y $\rho_n = \rho_t = 0{,}2$.

No así la curva para la velocidad, la que siempre muestra menores valores que los experimentales, ver Fig. 3.16. Un comportamiento similar se observa en el caso en que se varía el coeficiente de restitución tangencial $(\mu = 0{,}7, \rho_t = 0{,}2)$ y ambos coeficientes de restitución en forma simultánea, manteniendo el coeficiente de fricción constante $(\mu = 0{,}7)$, tal como se muestra en las Figs. 3.17 y 3.18.

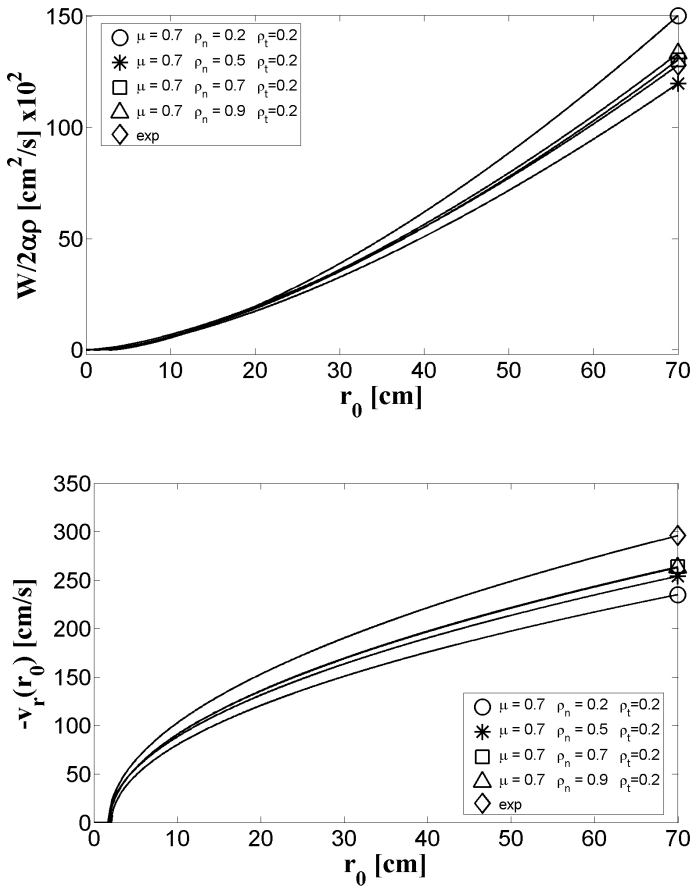


Figura 3.16. Efecto de la variación del coeficiente de restitución normal sobre la razón de flujo de masa (panel superior) y la velocidad radial máxima a la salida (panel inferior). $\rho_n = 0{,}2, 0{,}5, 0{,}7, 0{,}9$, $\mu = 0{,}7$ y $\rho_t = 0{,}2$.

Estos resultados muestran que, los cambios en los parámetros de restitución no tienen gran influencia en el comportamiento de las curvas de flujo, como tampoco en las curvas de velocidad. Por otra parte, la fricción afecta de manera considerable a estas curvas, observándose una dispersión importante, sobre todo en la velocidad, siendo aquella mucho menor en el caso del flujo, donde la influencia es apreciable sólo para valores grandes de la fricción.

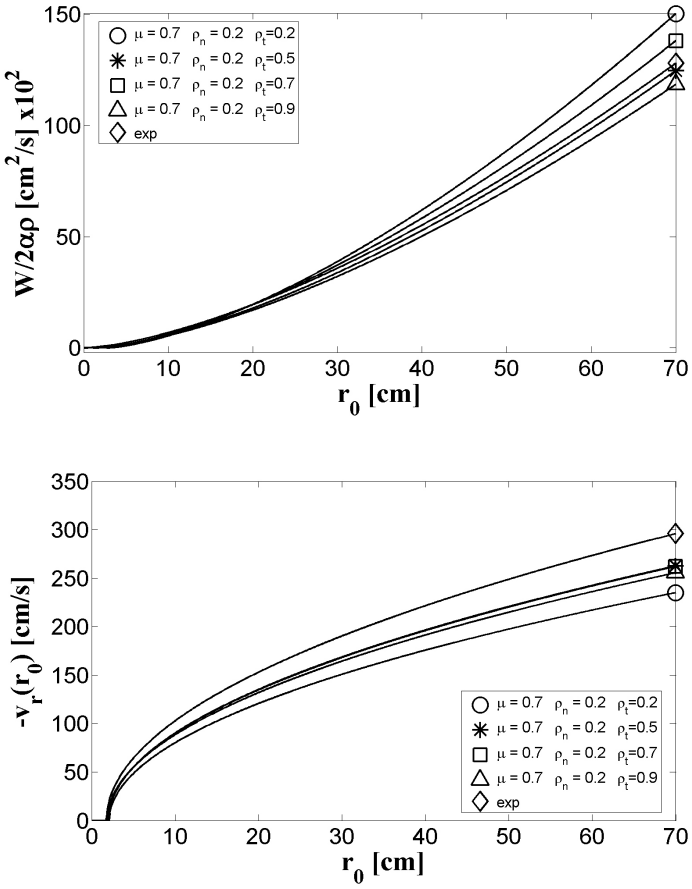


Figura 3.17. Efecto de la variación del coeficiente de restitución tangencial sobre la razón de flujo de masa (panel superior) y la velocidad radial máxima a la salida (panel inferior). $\rho_t = 0{,}2, 0{,}5, 0{,}7, 0{,}9$, $\mu = 0{,}7$ y $\rho_n = 0{,}2$.

## 3.9. Conclusiones

Los resultados experimentales muestran una red de contactos entre partículas, compuesta por cadenas extendidas y arcos que pueden estar sometidos a una carga vertical o bien presentarse en forma aislada siendo, en el caso de flujos gravitacionales desarrollados, las cadenas extendidas las componentes principales de esta red gracias a su mayor tiempo de vida medio y más alta probabilidad de ocurrencia. Por otra parte, el flujo está caracterizado por los cambios permanentes en la estructura de la red antes mencionada, transitando en forma alternada, desde situaciones en las que no hay interacción alguna hacia situaciones en

donde la densidad de contactos es alta y viceversa.

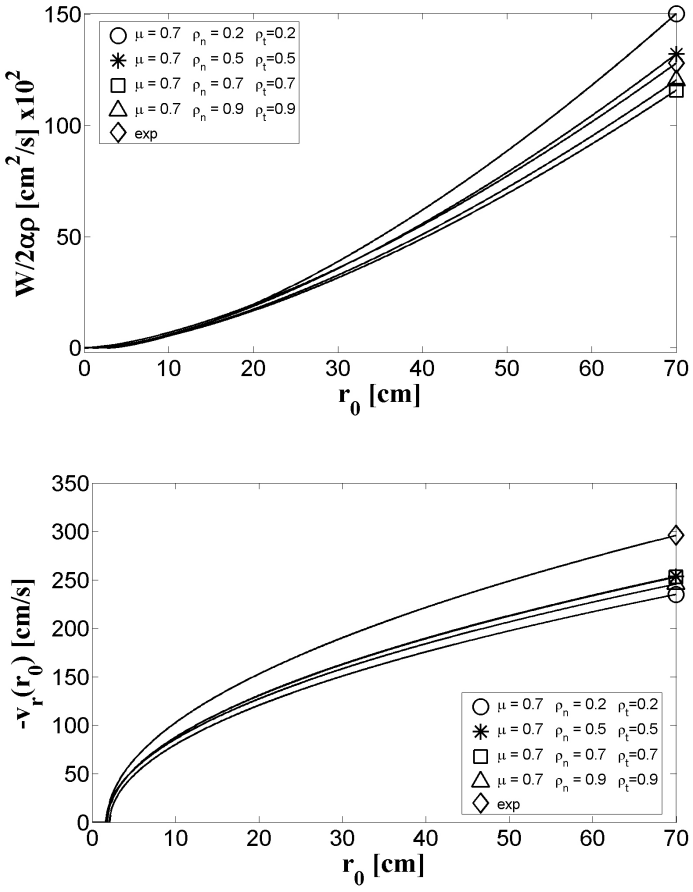


Figura 3.18. Efecto de la variación simultánea de los coeficientes de restitución sobre la razón de flujo de masa (panel superior) y la velocidad radial máxima a la salida (panel inferior). $\rho_n = \rho_t = 0{,}2, 0{,}5, 0{,}7, 0{,}9$, $\mu = 0{,}7$.

Este comportamiento es el reflejo de los períodos de expansión y compresión a los que están sometidos los granos al interior del sistema. Además, las fluctuaciones observadas en la velocidad pueden llegar a ser tan grandes como el valor medio de la misma y dependen fuertemente de la geometría del contenedor. Representando la fuerza, ejercida sobre las paredes laterales del reloj, a través de la longitud total de las cadenas extendidas y los arcos, se observa que existe un fuerte vínculo entre las fluctuaciones en la red de contactos y la velocidad media del sistema, lo cual es corroborado por la correlación cruzada entre ambas cantidades. Entonces, se puede interpretar las fluctuaciones en la velocidad media del sistema, producto

de las fuerza de contacto, como un mecanismo colectivo capaz de controlar el flujo de salida. Adicionalmente, se puede mencionar que, el escalamiento temporal de las fluctuaciones es consistente con un regimen inercial. Por otro lado, aunque no fue detectada la presencia de un arco permanente en las cercanías de la salida correspondiente a un *arco en caída libre*, sí se pudo determinar, a través del promedio temporal de las secuencias de imágenes, la existencia de dos regiones claramente definidas y separadas por una especie de arco promedio, el que puede ser asociado con el *arco en caída libre*. Efectivamente, este arco promedio actúa como frontera entre una zona con alta densidad de contactos y otra libre de ellos, lo que significa que bajo este arco, las partículas caen libremente bajo la influencia de la gravedad. Este arco promedio también es observado en el caso de flujos gravitacionales, controlados, de baja velocidad. En relación a la rugosidad de las paredes laterales, se observó que la presencia de esta rugosidad incide en la capacidad de desplazamiento de las partículas que están apoyadas sobre ellas, obligándolas a moverse en forma perpendicular a la pared, lo que implica que el sistema debe dilatarse en una cierta cantidad a fin de permitir este movimiento. También incide en la forma que tiene el promedio de las secuencias presentando una distribución menos homogénea producto de la rugosidad. Sin embargo, todavía es posible observar claramente el *arco en caída libre* promedio.

Otro punto interesante es el comportamiento de las componentes del campo de velocidades media el que, representado en coordenadas polares, puede ser modelado a través de funciones armónicas, equivalente a los dos primeros términos de una expansión en serie de Fourier, donde los términos pares representan la componente radial de la velocidad y los impares la componente angular. Esto sugiere la posibilidad de introducir nuevos modelos, tales que la dependencia angular de las componentes del campo de velocidades pueda ser generalizada al tomar cuenta términos de orden superior en la serie de Fourier. Además, se encontró que la velocidad decae radialmente como $1/r$ y $1/r^2$ en sus componentes radial y angular respectivamente. En consecuencia, la componente angular del campo de velocidades debiera ser introducida como factor de corrección, en los modelos empleados en la predicción de la razón de flujo de masa que consideran un campo de velocidades puramente radial, ver Ref. [2]. Por otro lado, los valores obtenidos, tanto para la velocidad radial máxima como la razón de flujo de masa a la salida, en función del radio medido desde el ápice virtual, pueden ser representados mediante curvas características del tipo $f(D - \delta d)$ y que, en el caso

del flujo, se asemeja bastante al resultado obtenido por Beverloo y sus colaboradores [28], con la salvedad, que el término $\delta d$ tiene una interpretación diferente. Mientras Beverloo y sus colaboradores lo definen como una región no disponible para el flujo de las partículas, en este caso ha sido interpretado como una apertura crítica bajo la cual el sistema permanece bloqueado permanentemente.

Se ha encontrado que es posible construir un arco a partir del tensor de deformación de corte promedio, suponiendo que la derivada del arco es paralela a una de las direcciones principales de este tensor. Más aún, el arco construído de esta manera puede ser ajustado mediante una curva catenaria, al igual que los *arcos en caída libre* promedio obtenidos experimentalmente, con un valor similar para el parámetro de ajuste $k/d \sim 4$. Por otra parte, se puede suponer que el sistema trata de construir arcos mediante este mecanismo, tarea que se ve impedida, en cierta forma, por las fluctuaciones presentes en el sistema, dando origen a las distintas formas para los arcos observados. Más aún, es factible interpretar las cadenas extendidas como arcos que no llegan a concretarse producto de estas fluctuaciones. Sin embargo, se debe recalcar que los experimentos no muestran evidencia de un arco permanente situado a la salida del sistema. En otras palabras, los resultados no verifican la existencia del *arco en caída libre*, sino que todo lo contrario, sugieren que este arco no existe.

El método de la dinámica de contactos, empleado en las simulaciones numéricas, es capaz de capturar la mayor parte de las características de la dinámica del sistema granular, incluyendo las condiciones de bloqueo permanente y reproduciendo el comportamiento incluso cuando no se logra alcanzar el flujo desarrollado. Esta similitud, entre las simulaciones y el comportamiento real del sistema, ha permitido tener un cierto grado de confianza en los resultados obtenidos, respecto del efecto que producen los cambio en la fricción y la restitución en la dinámica del sistema. Tanto la velocidad radial máxima como la razón de flujo de masa por unidad de ángulo y de densidad son, prácticamente, insensibles al cambio de los coeficientes de restitución, ya sea variando uno a la vez o ambos en forma simultánea. En cambio, el coeficiente de fricción tiene una influencia importante, siendo ésta de mayor consideración en la velocidad radial máxima. El efecto principal, que se puede observar, es la dispersión de las curvas de ajuste de manera tal que la velocidad a la salida es mayor mientras menor sea el coeficiente de fricción. No así en la razón de flujo de masa, en donde se produce un cambio notorio sólo cuando este coeficiente alcanza valores grandes.

En este capítulo se ha visto el comportamiento de un sistema granular, contenido en un reloj de arena confinado a dos dimensiones, que fluye bajo la acción de la gravedad. Además, se ha caracterizado el flujo a la salida mediante el campo de velocidades medio, obteniéndose así, el perfil espacial de velocidades al interior del sistema. Observando la velocidad media característica en conjunto con el largo total de las cadenas de contactos, se ha encontrado un fuerte enlace entre las fluctuaciones de la velocidad y la intermitencia de la red de contactos. Aunque, no se detectó la presencia del *arco en caída libre* permanente, sí se pudo comprobar que, en el promedio temporal de la secuencia de imágenes, se observan dos regiones, una con gran cantidad de esfuerzos y otra libre de ellos, separadas por una superficie que asemeja un arco y que ha sido asociado con un *arco en caída libre* promedio, ya que este arco presenta características similares a los *arcos en caída libre* propuestos en la literatura, ver por ejemplo las Refs. [2, 83]. Es claro que, la dinámica de los sistema granulares que fluyen está determinada en gran medida por la red de contactos (compuesta por cadenas extendidas y arcos) generada en su interior. En el capítulo siguiente, se verá como un sistema granular sometido a vibración, que al parecer no tiene relación alguna con el que se acaba de estudiar, también ve determinada su dinámica por la presencia de los arcos.

# CAPÍTULO 4: SEGREGACIÓN EN UNA COLUMNA BIDIMENSIONAL

A continuación se presenta un estudio numérico, basado en el método de la dinámica de contactos, acerca del problema de la segregación por tamaño en un sistema granular en dos dimensiones. El estudio está motivado por los resultados experimentales obtenidos por Duran y sus colaboradores, ver Ref. [48]. Siendo el objetivo principal, la verificación de la existencia de los dos mecanismos de ascenso, propuestos por ellos. Los valores obtenidos mediante las simulaciones numéricas muestran un comportamiento cualitativo muy cercano al observado en los experimentos.

## 4.1. Introducción

Dentro de la gran variedad de fenómenos que han sido observados en los sistemas granulares, uno de los más intrigantes es el de la segregación por tamaño [90,91]. Este fenómeno se ha observado en mezclas de granos de igual densidad sometidas a vibración, donde las partículas de mayor tamaño se distribuyen en la superficie del sistema, y ha sido estudiado extensivamente tanto experimental como numéricamente [92–94]. Por ejemplo, Rosato y sus colaboradores [25] se han basado en un algoritmo de Monte Carlo, en conjunto con un argumento cinético, para explicar la segregación como una consecuencia de la mayor movilidad de las partículas pequeñas. Por otra parte, Jullien et al [95], mediante una técnica de apilamiento para representar la segregación, han obtenido un valor crítico para la razón entre los radios de las partículas grandes y pequeñas igual a $\eta_{min} \sim 3$, bajo el cual no es posible observar la segregación. Por otra parte, los resultados experimentales han demostrado la existencia de una fuerte conexión entre los fenómenos de segregación y convección [6,96]. En la mayoría de los experimentos las partículas de mayor tamaño son elevadas en forma continua por el

flujo ascendente, producto del rollo de convección. Sin embargo, también se ha presentado evidencia experimental que muestra la existencia de dos tipos de mecanismos, mediante los cuales las partículas más grandes pueden ascender. En efecto, Duran y sus colaboradores [48] observaron que, en un arreglo bidimensional, aparte del movimiento de ascenso continuo generado por la convección, existe un segundo mecanismo mediante el cual las partículas más grandes ascienden en forma discontinua. Motivados por estos resultados experimentales y otros obtenidos mediante simulaciones numéricas relacionadas [95], Duran y su grupo formularon una teoría geométrica basada en la presencia de arcos locales [80], los que permiten que el intruso (partícula de mayor tamaño) se apoye en dos paredes laterales inclinadas $60°$ respecto de la horizontal, que corresponde al ángulo de reposo de un sistema granular bidimensional monodisperso. Bajo este esquema las partículas pequeñas son capaces de deslizar a lo largo de la superficie del intruso, mientras éste asciende a través de saltos del orden del diámetro de las partículas pequeñas. Además, una nueva razón crítica fue encontrada por estos autores $\eta_{cd} \sim 13$ la que separa los ascensos discontinuos de los continuos. En otras palabras, para valores de $\eta > \eta_{cd}$ el ascenso del intruso es continuo. Simulaciones numéricas desarrolladas por Jullien et al [97], basadas en un modelo heurístico, al que se le han incorporado fluctuaciones aleatorias en la dirección horizontal, han mostrado evidencia de la dinámica discontinua a través de saltos. Por otro lado, Pöschel y Herrmann [98] mostraron, a través de dinámica molecular, que el ascenso de la partícula grande siempre está acompañada por celdas de convección, inclusive para las frecuencias más bajas posibles. Estos autores han sugerido que, el mecanismo de arcos locales podría controlar la forma en la cual la partícula grande se mueve en la zona de convección débil antes que ésta sea elevada rápidamente. Hasta donde se sabe, las simulaciones numéricas basadas en primeros principios, aún no han sido capaces de capturar las características principales del efecto producido por los arcos en la segregación.

## 4.2. Preparación del sistema

Motivados por el trabajo de Duran et al [48] se ha considerado un sistema granular bidimensional monodisperso, compuesto por $3300$ partículas de diámetro $d = 1{,}5mm$ más una partícula denominada *intruso* de diámetro variable entre $3d$ y $13d$, distribuidas en una

caja de $50 \times 66$ partículas de ancho y alto respectivamente. Este sistema es sometido a un movimiento oscilatorio vertical de frecuencia $f = 15Hz$ y amplitud variable $A$, de manera de obtener un rango de aceleración adimensional, $\Gamma \equiv A(2\pi f)^2/g$, entre $1{,}5$ y $3{,}0$. El coeficiente de roce para las partículas es $\mu = 0{,}97$, mientras que los coeficientes de restitución normal y tangencial son $\rho_n = 0{,}6$ y $\rho_t = 0{,}6$ respectivamente. Estos valores son aproximadamente similares a los correspondientes a partículas de aluminio, tratadas químicamente para aumentar su fricción. Inicialmente, el intruso se ubica centrado sobre la base del contenedor y el resto de las partículas se distribuyen de forma desordenada alrededor de éste, formando un empaquetamiento desordenado y aleatorio. Luego, en ausencia de vibración, se deja compactar el sistema por cerca de un minuto de tiempo real mediante la acción de la gravedad. Entonces, se comienza a vibrar el sistema y se observa la evolución por alrededor de $15$ minutos. El paso de tiempo empleado en las simulaciones es igual a $1ms$, este valor fue escogido luego de verificar que los resultados entregados por éstas, eran independientes del tamaño del paso de tiempo utilizado, para valores inferiores a aquél.

## 4.3. Ascenso del intruso y energía inyectada

Una de las variables que mayor influencia tiene en la segregación es la energía inyectada al sistema, la cual es medida a través del parámetro $\Gamma$. Para valores suficientemente bajos de $\Gamma$, ver curvas $1$, $2$ y $3$ en la Fig. 4.1, tres regímenes distintos pueden ser identificados. Primero se observa un rápido ascenso del intruso, luego en las etapas intermedias el movimiento del intruso se vuelve muy lento e incluso puede llegar a detenerse. Finalmente, el intruso termina acelerando rápidamente hasta que alcanza la superficie del sistema. En cambio, para valores mayores de $\Gamma$, curvas $5$, $6$, $7$ y $8$ de la misma figura, las etapas intermedias tienden a desaparecer y el intruso acelera de forma rápida hacia la superficie. Por otro lado, el rápido movimiento inicial del intruso es producto del empuje, generado por el movimiento hacia el fondo de las partículas situadas cerca de las paredes laterales. Este movimiento es debido a que el sistema trata de formar rollos de convección del orden del tamaño del sistema. Sin embargo, luego de transcurridos algunos segundos, este movimiento se detiene y los rollos de convección comienzan a formarse gradualmente desde la superficie. Una forma de caracterizar este proceso es mediante la intensidad de la convección, para tal efecto se hará uso del

flujo de convección $\Phi$ introducido por Pöschel y Herrmann [98]. Donde $\Phi$ corresponde a la entre el flujo de masa hacia arriba $J_+$ y el flujo de masa hacia abajo $J_-$, ambas cantidades se definen positivamente por lo que $\Phi$ es distinto de cero en el regimen convectivo. Las cantidades $J_+$ y $J_-$, se calculan determinando el número de partículas que se mueven hacia arriba y hacia abajo respectivamente, ésta cantidad tiene unidades de número de partículas por ciclo. En la práctica, para cada partícula se miden los cambios en la posición relativa, con respecto a una línea horizontal, en nodos consecutivos de la vibración del contenedor. En nuestro caso, el sistema fue dividido en $100$ líneas desde el fondo hasta la superficie del contenedor.

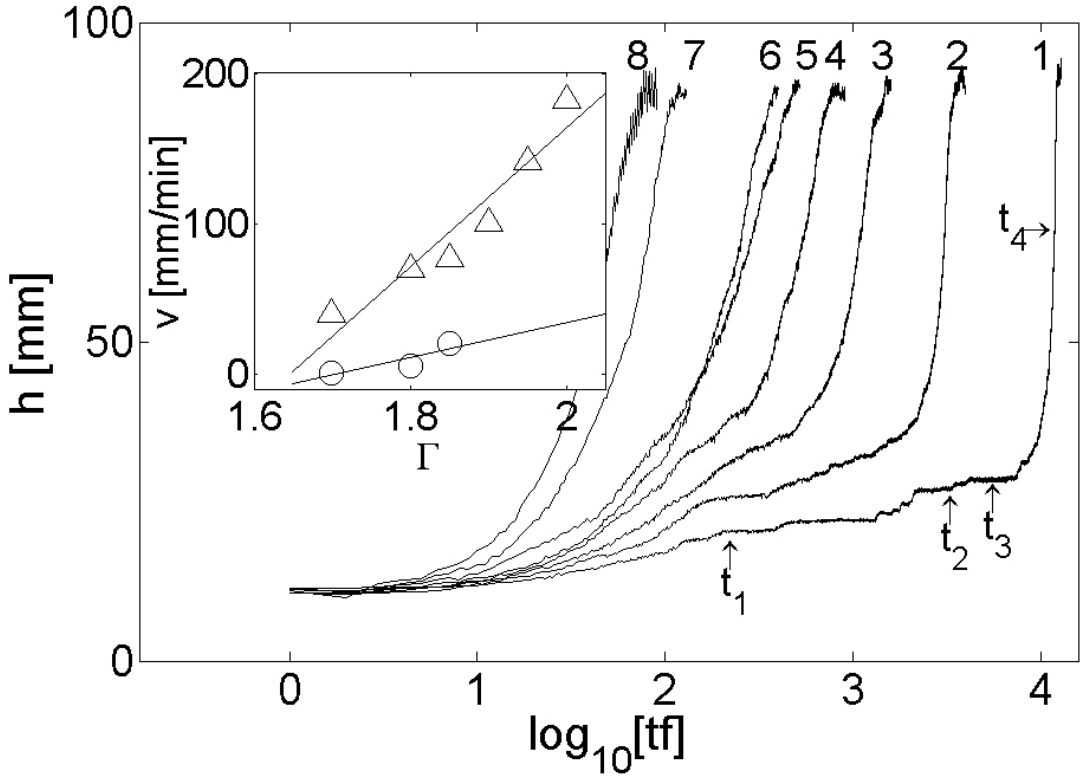


Figura 4.1. Posición vertical del intruso, $D = 13d$, medida en nodos consecutivos de la oscilación del contenedor como función de $tf$, para una frecuencia de oscilación constante $f = 15Hz$ y diferentes valores de la aceleración: $(1)$ $\Gamma = 1{,}75$, $(2)$ $\Gamma = 1{,}80$, $(3)$ $\Gamma = 1{,}85$, $(4)$ $\Gamma = 1{,}90$, $(5)$ $\Gamma = 1{,}95$, $(6)$ $\Gamma = 2{,}0$, $(7)$ $\Gamma = 2{,}50$, $(8)$ $\Gamma = 3{,}0$. El recuadro muestra la velocidad media del intruso como función de $\Gamma$ en el regimen de ascenso discontinuo y convectivo.

En la Fig. 4.2 se muestra la intensidad de la convección para la curva $1$ de la Fig. 4.1. Se puede apreciar que al inicio del movimiento, $t = 0{,}1min$, la intensidad de la convección no es

nula cerca del fondo del contenedor. Luego, disminuye para volver a aumentar lentamente a medida que transcurre el tiempo.

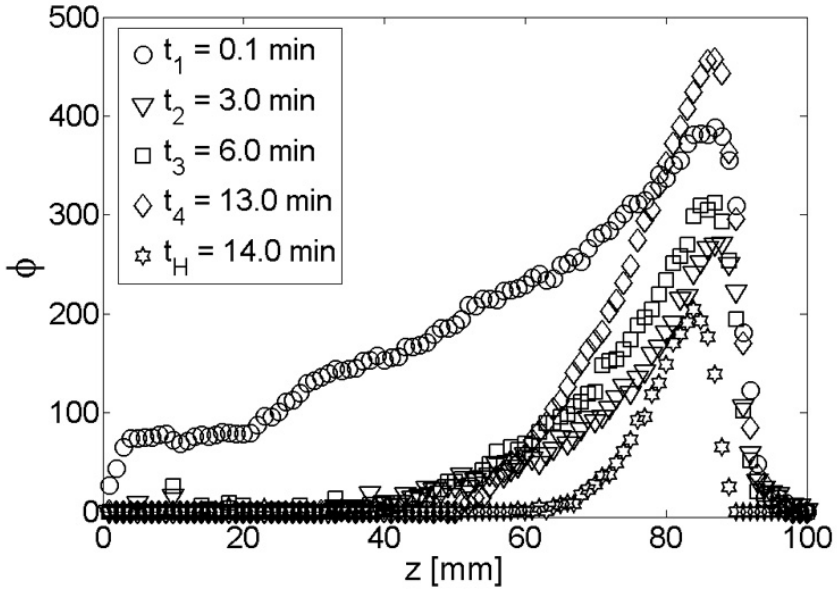


Figura 4.2. Intensidad de la convección $\Phi$ como función de la altura para los instantes de tiempo marcados en la curva $(1)$ de la Fig.4.1.

Sin embargo, una vez que el intruso alcanza la superficie, la intensidad de la convección disminuye drásticamente. Nótese que, la intensidad de la convección muestra un decaimiento exponencial, lo que nos permite definir una longitud de penetración para el rollo de convección. Aparentemente, el rápido movimiento inicial del intruso parece detenerse, pero al observar con mayor detenimiento la curva $1$ (Fig. 4.1), es posible notar que el intruso asciende muy lentamente, a través de saltos discontinuos del orden de un diámetro de partícula. En este regimen la velocidad del intruso es de alrededor de $1mm/min$, para valores pequeños de $\Gamma$. Esta velocidad aumenta rápidamente a medida que el valor de la aceleración se incrementa, lo que nos indica que el número de saltos que ocurren por intervalo de tiempo es mayor. Se debe destacar que, aún cuando la convección es de baja intensidad ésta puede afectar las zonas cercanas al intruso, situadas sobre él, influenciando el ascenso por saltos. A medida que transcurre el tiempo, el intruso se mueve lentamente hacia el rollo de convección. El ascenso rápido del intruso comienza cuando el rollo de convección alcanza el centro de éste. Por último, en el regimen convectivo la velocidad del intruso es igual a la velocidad con la

que se mueven las partículas hacia arriba.

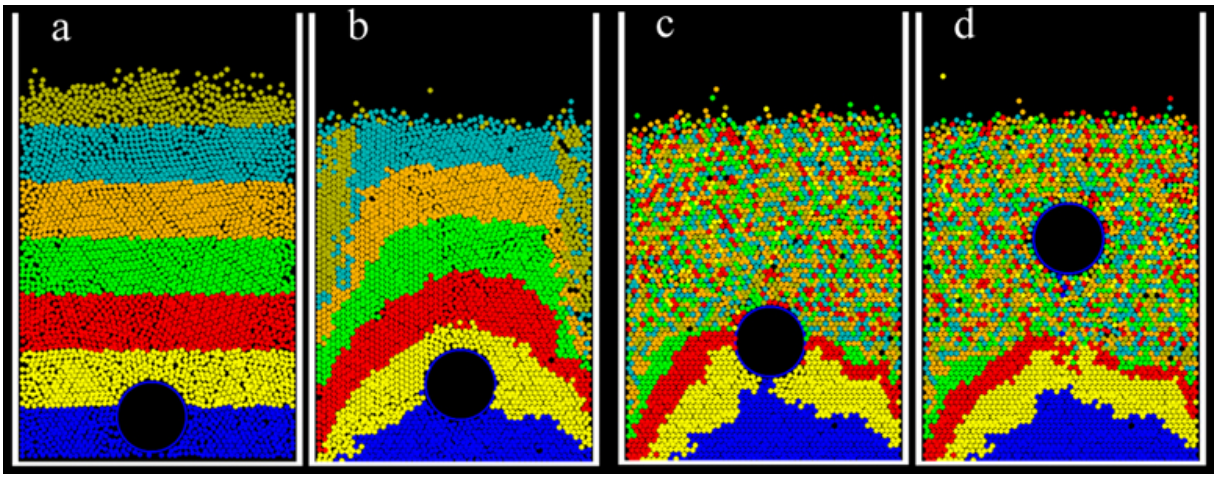


Figura 4.3. Imágenes, tomadas a diferentes tiempos, que muestran el movimiento de las partículas producto de la convección, junto con el ascenso del intruso. Los valores de los parámetros son: $f = 15Hz$, $\Gamma = 1{,}7$ y $\eta = 13$. $(a)$ Inicialmente, $t = 0{,}01min$, todas las partículas ubicadas cerca de las paredes se mueven hacia abajo generando un rápido movimiento del intruso hacia arriba.$(b)$ $t = 0{,}2min$, la convección inicial se detiene en el fondo del contenedor, de manera tal que no se observan nuevas deformaciones en esta zona. Mientras que, el rollo de convección avanza progresivamente desde la superficie del sistema. $(c)$ $t = 9min$, cuando el centro del intruso es alcanzado por el rollo de convección, aquél es levantado por la corriente ascendente. $(d)$ $t = 13min$, el intruso asciende rápidamente cuando es atrapado por la corriente convectiva ascendente.

## 4.4. Efecto del intruso sobre la convección

Tal como ha sido visto, la convección afecta fuertemente el ascenso del intruso. Sin embargo, no se ha analizado si la presencia del intruso produce algún efecto en el desarrollo de la convección. Para dilucidar esta interrogante hemos realizado una simulación numérica en donde el tamaño del intruso es igual al de las partículas. Al comparar la Fig. 4.2 y la Fig. 4.4 se puede apreciar que la penetración del rollo de convección es mayor en presencia del intruso. Cuando éste comienza a ascender, sin ser atrapado aún por el rollo convectivo, se observa que la intensidad de la convección comienza a aumentar gradualmente, desde un

valor inferior al inicial y, además, que la longitud de penetración del rollo es menor.

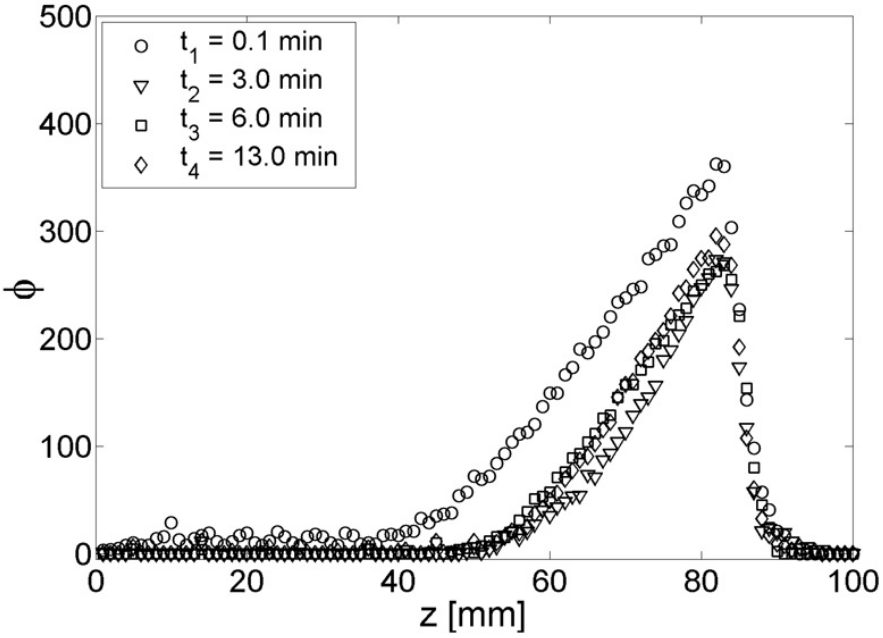


Figura 4.4. Intensidad de la convección en ausencia del intruso.

Una vez que el intruso ha alcanzado la superficie del sistema, tanto la intensidad de la convección como su longitud de penetración se reducen en un alto porcentaje. Por otro lado, aunque la convección es menor en ausencia del intruso, ésta continúa desarrollándose lentamente y es posible que invada todo el sistema, si se espera el tiempo suficiente.

## 4.5. Ascenso discontinuo y arcos

Cuando el intruso asciende en forma discontinua se observa que, la zona de mayor intensidad convectiva se ubica por sobre éste, ver Fig. 4.3$c$. Esto nos lleva a suponer que, en este regimen, no es la convección el mecanismo preponderante que permite el ascenso del intruso. Mediante un análisis local, en la vecindad del intruso, se tratará de verificar las ideas propuestas por Duran et al [80] para explicar este ascenso discontinuo. Considérese los vecinos cercanos al intruso, situados en la región definida por los radios $D/2$ y $D/2 + 3d/2$, medidos desde el centro de éste. Al seguir la posición angular de estas partículas alrededor de un salto discontinuo, durante un lapso de $6s$, con una resolución temporal de $1ms$, se puede observar que, la trayectoria de aquellas tiende hacia la posición angular $0°$ lo que muestra,

claramente, que las partículas cercanas al intruso se deslizan por debajo de éste, tal como se puede apreciar en la Fig. 4.5.

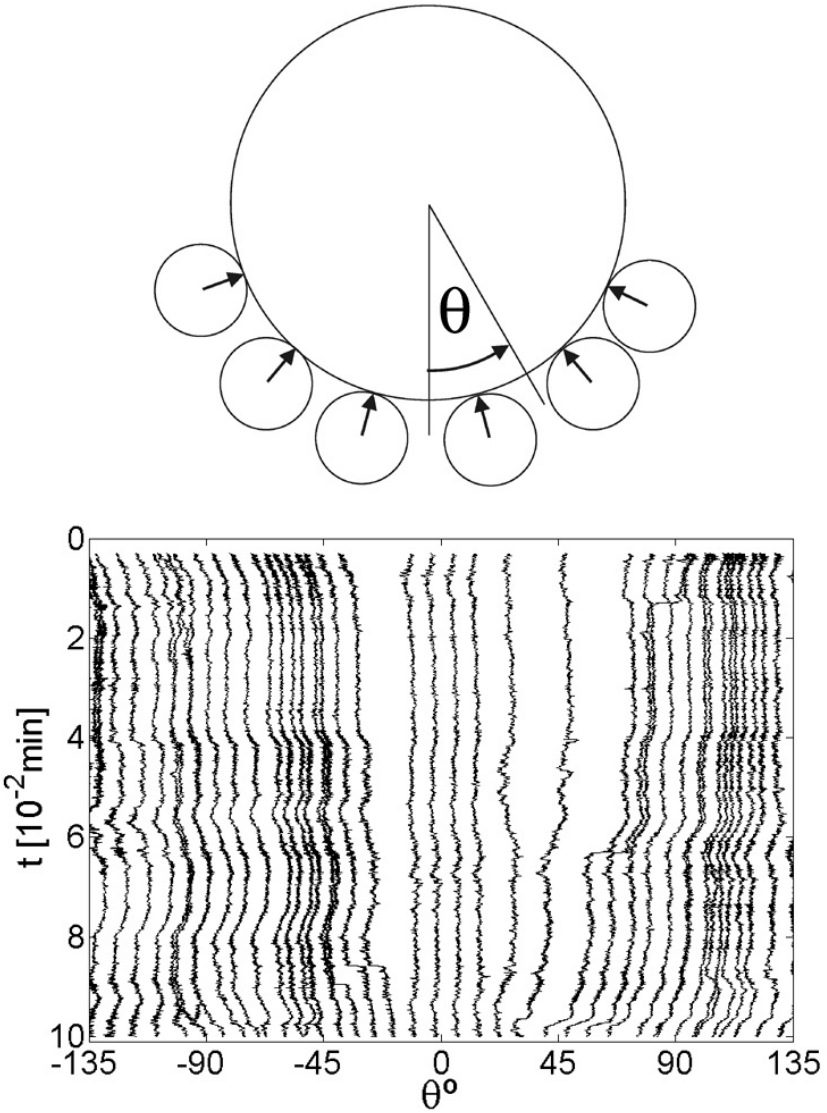


Figura 4.5. Panel superior. Esquema que muestra los vecinos más cercanos al intruso. Panel inferior. Trayectoria angular de las partículas situadas en las cercanías del intruso, determinadas con una resolución temporal de $1ms$, para $\Gamma = 1{,}7$ y $f = 15Hz$, donde el tiempo aumenta hacia abajo. Nótese el movimiento colectivo de las partículas hacia la parte inferior del intruso.

La duración de estos saltos en la posición angular varia entre $1/2$ y $5$ períodos de oscilación, es decir, entre $0{,}033s$ y $0{,}33s$ para una aceleración $\Gamma = 1{,}7$, siendo la duración promedio de estos saltos del orden de $0{,}1s$, lo que equivale a $1{,}5$ ciclos. Además, no es posible distinguir una zona

preferencial, dentro del ciclo de oscilación, para la cual se producen estos deslizamientos. Se puede observar, a partir de la Fig. 4.3$b$, la existencia de vacancias cerca de la parte baja del intruso. Estas vacancias facilitan el deslizamiento de las partículas que lo rodean. Cada vez que ocurre algún deslizamiento, es posible apreciar un movimiento discontinuo del intruso. Estas características también se pueden observar en simulaciones numéricas realizadas con intrusos de diferentes tamaños.

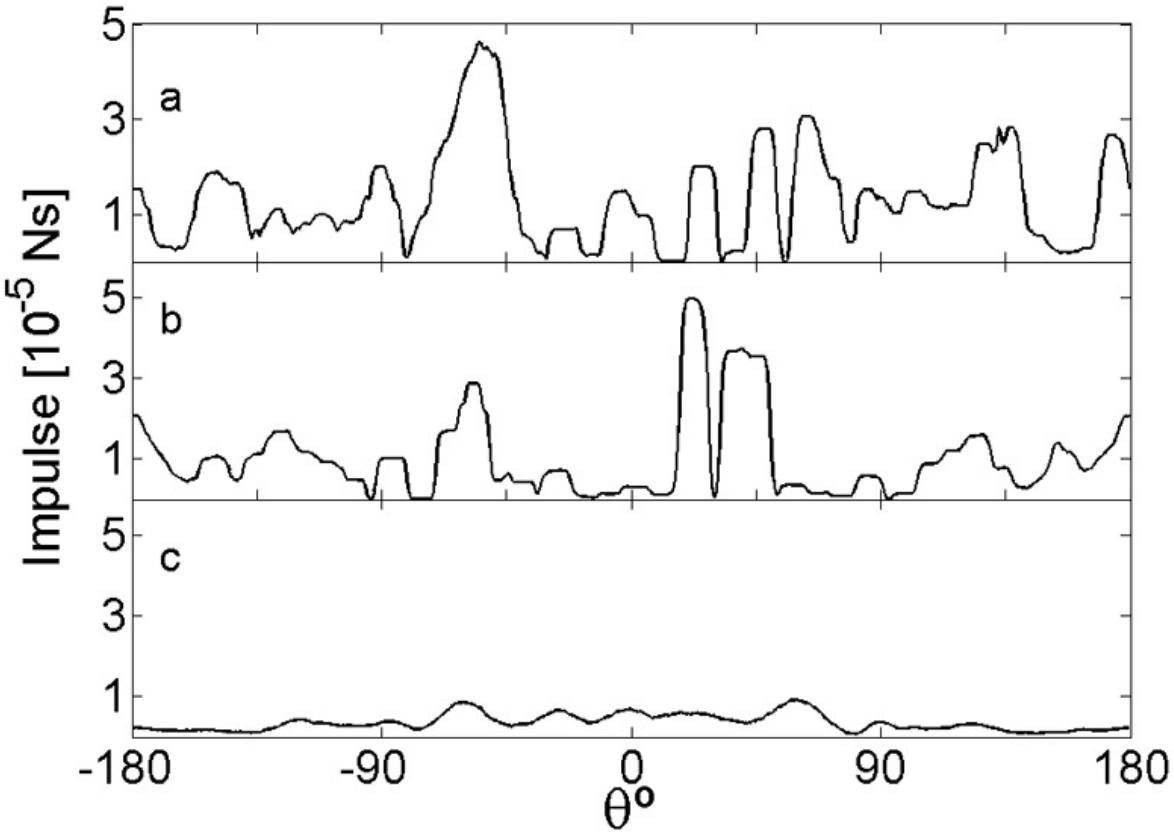


Figura 4.6. Promedio temporal de la fuerza impulsora normal (sobre un tiempo de $6s$), como función de la posición angular $\theta$, para una frecuencia de oscilación igual a $f = 15Hz$ y $\Gamma = 1{,}7$. $(a)$ Promedio tomado en torno a $t_1$ (curva $1$ en Fig.4.1) que contiene un salto discontinuo. Se puede observar que existe un máximo para la fuerza impulsora al lado izquierdo del intruso. En cambio, al lado derecho se observa una mayor dispersión de la fuerza producto, de la mayor movilidad de las partículas pequeñas, por efecto de una mayor concentración de vacancias. $(b)$ Promedio tomado en la parte plana de la curva $1$, alrededor de $t_3$ en donde no se aprecia salto alguno del intruso. $(c)$ Promedio tomado en la zona del regimen convectivo alrededor de $t_4$.

Otro aspecto importante, es la caracterización de la interacción entre el intruso y las partículas que lo rodean. Esta interacción puede ser determinada a través de la fuerza impulsora normal, que actúa sobre el intruso, como función de la posición angular. De esta manera, si el mecanismo de arcos propuesto por Duran et al [80] está presente, se espera que la fuerza impulsora muestre varios máximos, ubicados en las posiciones angulares correspondientes a las partículas que soportan al intruso. Por otra parte, puesto que este mecanismo requiere que el intruso sea sostenido, principalmente, por fuerzas laterales es razonable suponer que existe un mínimo para esta fuerza justo debajo del intruso, en $\theta = 0°$. A partir de la curva $1$ de la Fig. 4.1, se obtuvo el promedio de la fuerza normal sobre el intruso, durante un lapso de $6s$ alrededor de los tiempos $t_1$, $t_3$ y $t_4$. Efectivamente, tal como se muestra en la Fig. 4.6$a$ correspondiente al tiempo $t_1$, la fuerza impulsora normal muestra esencialmente las características antes mencionadas, se puede ver un máximo de la fuerza en $\theta = \pm 60°$ y un mínimo en $\theta = 0°$, lo que es consistente con un empaquetamiento hexagonal de las partículas pequeñas. Nótese que, el máximo del lado derecho es mucho más disperso, esto se debe a que el empaquetamiento es mucho menor en esta zona producto de la presencia de un mayor número de vacancias, lo que permite una mayor movilidad a las partículas y un incremento en la dispersión de la fuerza. En cambio, en la curva de la Fig. 4.6$b$ correspondiente al tiempo $t_3$, al no existir un salto, la fuerza se muestra mucho más dispersa. Por último, en la curva $c$ de la misma figura, prácticamente, no se observa fuerza impulsora, ya que al estar en el regimen convectivo la movilidad de las partículas es muy alta, lo que no permite la formación de arcos que sean capaces de sostener al intruso. En conclusión, se puede decir que a partir de nuestros resultados numéricos, es posible observar los ingredientes principales que conforman el mecanismo de arcos. Es decir, la presencia de vacancias, que permiten el deslizamiento de las partículas que rodean al intruso y la localización de la fuerza en el ángulo de empaquetamiento.

## 4.6. Efecto del empaquetamiento inicial

En los experimentos, en los que se ha utilizado un conjunto de partículas mono disperso, sólo es posible conseguir una configuración hexagonal compacta, lo que impide determinar los posibles efectos de una distribución inicial distinta sobre la segregación y la convec-

ción. En cambio, esta limitación no existe en las simulaciones numéricas, lo que nos permitiría observar los efectos de un empaquetamiento inicial diferente al hexagonal compacto. Con este fin, se han preparado dos configuraciones claramente diferenciables: una configuración desordenada y otra hexagonal compacta.

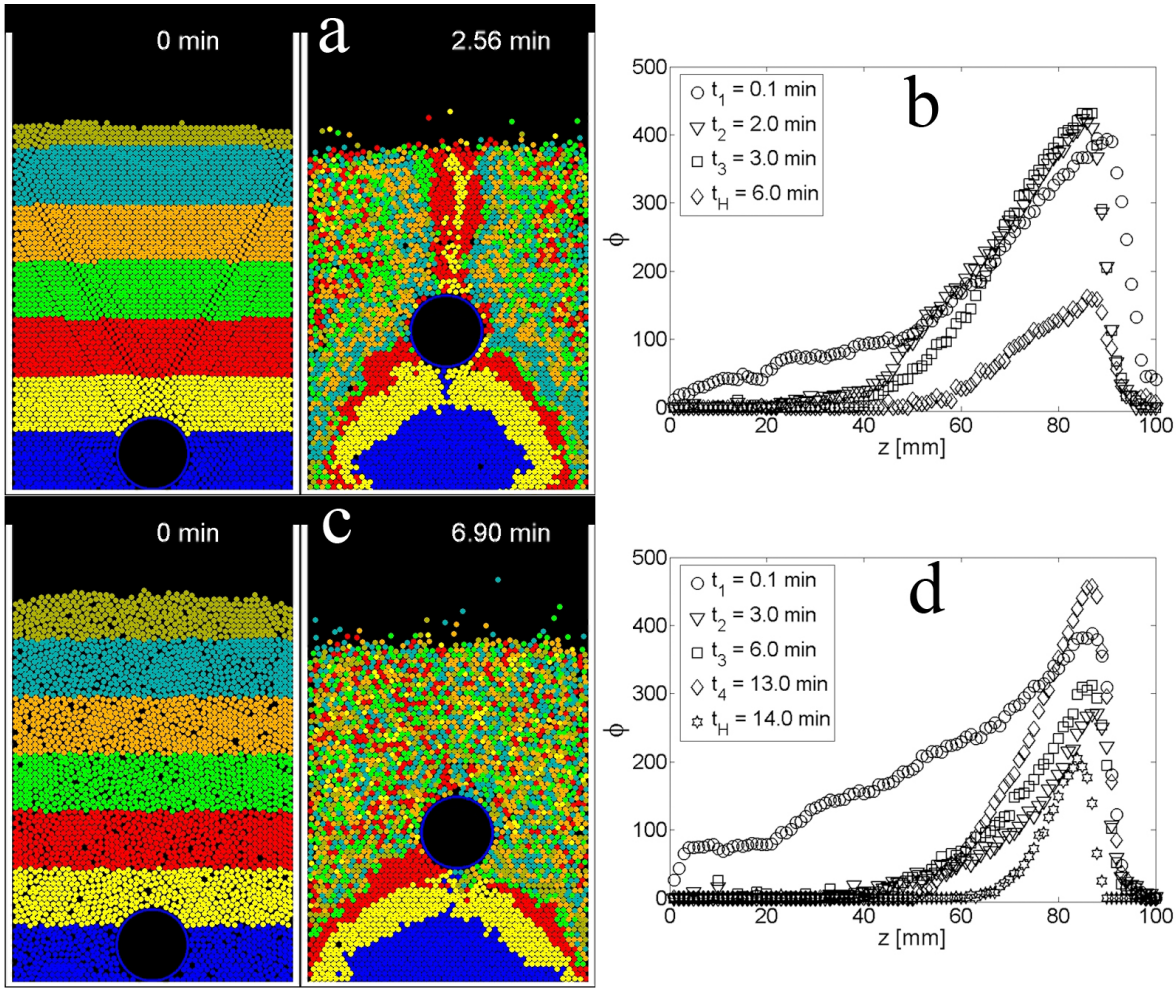


Figura 4.7. Efecto del empaquetamiento inicial en la intensidad de la convección. $(a)$ En el empaquetamiento hexagonal se pueden observar los defectos producidos por la presencia del intruso. $(b)$ Intensidad de la convección para la configuración inicial hexagonal.$(c)$ En el empaquetamiento desordenado, los defectos introducidos por la presencia del intruso sólo afectan la vecindad del mismo, sin ser apreciables en el resto del sistema. $(d)$ Intensidad de la convección para la configuración inicial desordenada.

En la preparación de estas configuraciones, al igual que antes, el intruso se ubica centrado en el fondo del contenedor, distribuyéndose las partículas alrededor de éste en forma aleatoria o

bien formando una red hexagonal. Luego, se deja evolucionar el sistema bajo la influencia de la gravedad por un lapso de $1min$. Finalmente, el sistema se hace vibrar observando su evolución por cerca de $15min$. Inicialmente, en el caso de la configuración hexagonal, las fuerzas de contacto se distribuyen a lo largo de líneas orientadas a $\pm 60°$ respecto de la horizontal. Además, la presencia del intruso genera dos líneas de defecto, con cerca de $10$ partículas de ancho, que están orientadas igual que las líneas de fuerza y que se extienden a lo largo de todo el sistema, ver Fig. 4.7$a$. En cambio, en la distribución desordenada, las fuerzas se distribuyen de manera isótropa y la perturbación esta localizada sólo en las cercanías del intruso, tal como se muestra en la Fig. 4.7$c$. Al comparar la intensidad de la convección, se puede notar que, en ambos casos, el brazo convección penetra rápidamente hasta el fondo del contenedor, ver Fig. 4.7 $b$ y $d$. La principal diferencia se encuentra en los instantes iniciales, es decir, cuando comienza a desarrollarse la convección ($t = 1min$). Esta diferencia puede ser explicada por la capacidad que tienen las partículas para deslizar. Claramente, la configuración desordenada tiene una mayor cantidad de vacancias, lo que aumenta la movilidad de las partículas y, por consiguiente, el desarrollo de la convección a distancias más grandes. Nótese que, al iniciarse la vibración, la configuración desordenada evoluciona hacia una configuración hexagonal, alcanzándola en la zona cercana a la base en alrededor de $20s$. Posteriormente, la intensidad es ligeramente mayor en la configuración hexagonal y aumenta en forma leve con el transcurso del tiempo. En cambio, la distancia de penetración del rollo de convección es muy similar en ambas configuraciones. Otra característica importante, que puede ser observada a partir de las curvas de intensidad de la convección, es la gran disminución que sufre ésta, una vez que el intruso ha alcanzado la superficie. Por otra parte, el tiempo de ascenso también se ve afectado por la configuración inicial de las partículas. En efecto, tal como se muestra en el recuadro de la izquierda de la Fig. 4.8, el tiempo de ascenso es mucho menor cuando la configuración inicial es hexagonal. Sin embargo, la velocidad de ascenso en el regimen convectivo, en ambas configuraciones, es prácticamente la misma, ver recuadro derecho en la Fig. 4.8. En consecuencia, los distintos tiempos de ascenso, en función de la configuración, pueden ser producto de la diferencia en la velocidad del intruso en el regimen de arcos o bien de un reordenamiento configuracional, debido al desarrollo del brazo convectivo, lo que puede afectar la posición del intruso. A partir del recuadro de la derecha de la Fig. 4.8, se puede observar que el reordenamiento configuracional es más efectivo cuando el sistema se

encuentra, inicialmente, en un estado de desorden, lo que explica el rápido ascenso inicial del intruso. Sin embargo, del mismo recuadro se puede inferir una mayor actividad en la zona del regimen de arcos, para una configuración inicial hexagonal, lo que incrementa el ascenso del intruso. En consecuencia, no es posible obtener una respuesta concluyente que permita identificar cual de los mecanismos presentes es el dominante, a la hora de explicar el menor tiempo de ascenso observado en la configuración hexagonal.

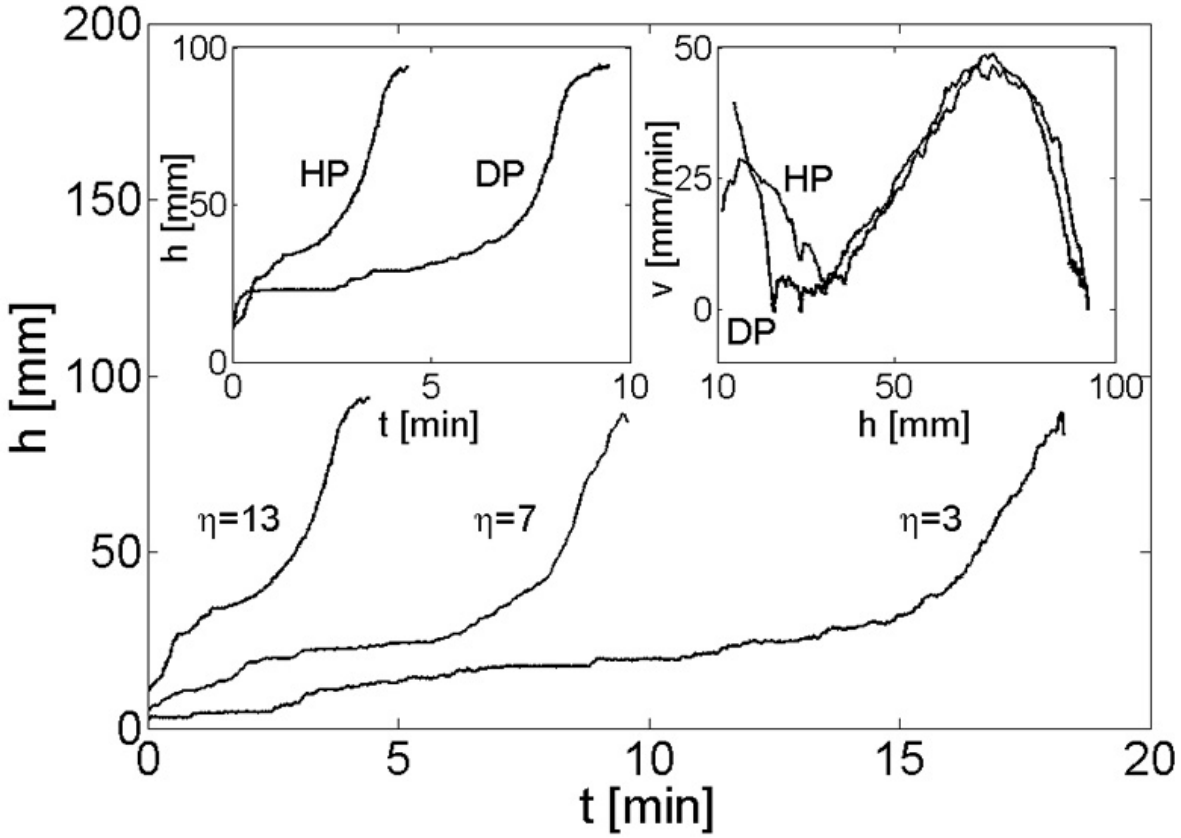


Figura 4.8. Posición vertical del intruso, como función del tiempo para distintos tamaños del mismo, con $f = 15Hz$ y $\Gamma = 1{,}7$ para una configuración inicial hexagonal. El recuadro de la izquierda muestra el efecto en la posición vertical del intruso debido a la configuración inicial, $(HP)$ hexagonal y $(DP)$ desordenada, $\eta = 13$. En el recuadro de la derecha, se compara la velocidad de ascenso del intruso, en el regimen convectivo, para ambas configuraciones.

## 4.7. Tamaño del intruso y segregación

Las curvas de ascenso del intruso muestran que, el tiempo que toma éste en llegar a la superficie es mucho mayor a medida que se disminuye el tamaño del mismo, tal como se muestra en la Fig. 4.8. Nótese que, los distintos regímenes de ascenso, que pueden ser distinguidos en forma clara para intrusos de tamaño pequeño, tienden a confundirse en uno sólo cuando se incrementa el diámetro del intruso. En experimentos y simulaciones numéricas anteriores, se ha determinado que la velocidad de ascenso del intruso es, aproximadamente, una función creciente del tamaño del mismo. En este caso, al tomar la pendiente promedio, en el regimen de arcos, la velocidad del intruso se puede escribir de la siguiente forma:

$$v_{arcos}^{int} \sim 0{,}6\frac{D}{d} - 1{,}4\left[\frac{mm}{min}\right]. \tag{4.1}$$

Una ley similar fue obtenida por Duran et al [80] para el regimen de arcos con la salvedad que requiere de un tamaño mínimo del intruso del orden de $D \sim 3d$, para poder observar la segregación. Aunque estas simulaciones no muestran una evidencia fuerte de la existencia de este tamaño mínimo, esto no contradice los resultados experimentales puesto que, tal valor mínimo es sensible a la amplitud de la vibración, la razón de aspecto del contenedor y la posición inicial del intruso. De manera análoga, se puede obtener la velocidad de ascenso en la zona convectiva, la que se escribe como:

$$v_{conv}^{int} \sim 2{,}5\frac{D}{d} - 14\left[\frac{mm}{min}\right]. \tag{4.2}$$

Nótese que, la velocidad de ascenso en el regimen convectivo es cuatro veces más grande que en el regimen de arcos. Finalmente, se cree que esta dependencia de la velocidad de ascenso, es una manifestación del efecto que ejerce el tamaño del intruso en la intensidad de la convección. En caso contrario, la velocidad de ascenso del intruso debería ser independiente del tamaño de éste.

Con el fin de examinar lo que sucede cuando el ancho del contenedor es mucho mayor que su altura, se ha realizado una simulación en donde las dimensiones del contenedor eran $60 \times 200$ partículas de alto y ancho respectivamente, con un diámetro del intruso de $D = 13d$, una frecuencia de oscilación $f = 15Hz$ y una aceleración de $\Gamma = 2$. Inicialmente se

desarrolla, en forma muy rápida, un brazo de convección desde las paredes laterales. Este rollo es simétrico y alcanza el fondo del contenedor. Además, se extiende horizontalmente una distancia igual a la altura del sistema. A medida que transcurre el tiempo, producto de la fricción inducida, se van generando gradualmente dos nuevos rollos de tamaño similar a los anteriores, ubicados en el centro del contenedor. Estos rollos van atrapando progresivamente al intruso. Al parecer, éste sigue en forma pasiva la corriente de convección, moviéndose hacia arriba y abajo con una velocidad constante. Bajo estas condiciones, el tamaño del intruso parece no afectar de manera apreciable la intensidad de la convección. Naturalmente, ya que los rollos de convección, desarrollados a partir de las paredes, alcanzan una distancia igual a la altura del sistema, es razonable suponer que el tamaño óptimo del ancho del sistema, para favorecer la generación de la convección, es igual al doble de su altura. Un punto importante, que aún no ha sido verificado, es si este ancho óptimo también corresponde al ancho crítico para el cual la velocidad de ascenso del intruso es independiente de su tamaño.

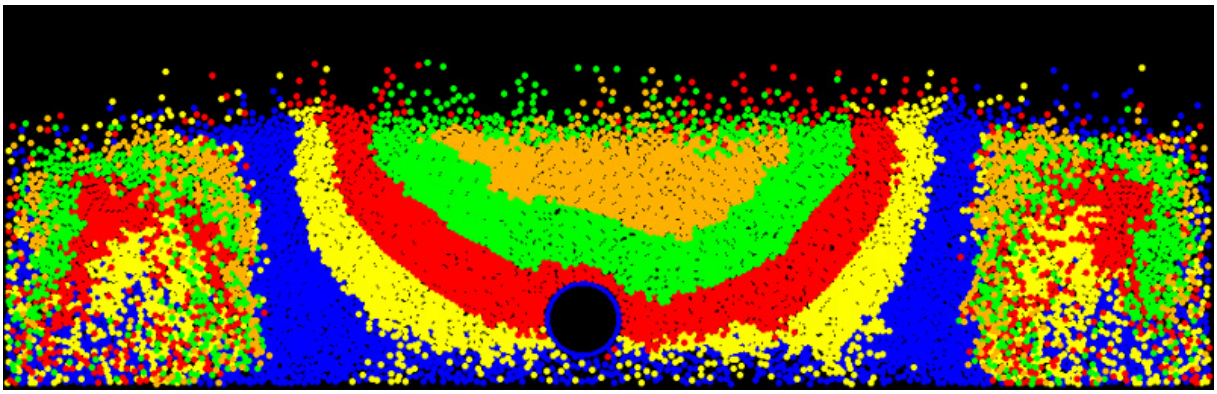

Figura 4.9. Efecto de la razón de aspecto del contenedor en la dinámica de la segregación. El ancho fue incrementado hasta $200d$ y se mantuvo al alto en $60d$, $f = 15Hz$, $\Gamma = 2$ y $D/d = 13$. Los rollos de convección que nacen en las paredes inducen dos rollos al interior del sistema.

## 4.8. Conclusiones

Las características principales del mecanismo de los arcos, presentado en la Ref. [48], son capturadas en su mayoría por las simulaciones numéricas aquí presentadas. Sin embargo, existen algunas diferencias respecto de los valores empleados en los experimentos, lo que nos impide realizar una comparación cuantitativa precisa. Considérese, por ejemplo, la posición

inicial del intruso, en las simulaciones éste se ubicaba en el fondo del contenedor mientras que en los experimentos estaba localizado a $1{,}5cm$ del fondo. Se sabe que la posición inicial del intruso disminuye el tiempo de ascenso en una forma compleja, ver por ejemplo Ref. [98]. Otra diferencia importante, es la aceleración para la cual aparece la convección, $\Gamma = 1{,}25$ para los experimentos y $\Gamma = 1{,}7$ para las simulaciones. Para el valor de aceleración utilizado en las simulaciones, los experimentos muestran un rollo convectivo que invade todo el sistema. En las simulaciones, el rollo de convección sólo penetra una fracción de la altura del sistema lo que permite observar el regimen de arcos a valores de $\Gamma$ más altos. Esta diferencia se debe, entre otras cosas, al mayor valor del coeficiente de fricción utilizado en la simulaciones. Tal como se observa en los experimentos, al aumentar la aceleración del sistema, el rollo de convección penetra de manera más profunda extendiéndose por todo el sistema y, por consiguiente, el regimen discontinuo deja de ser observado. Otra importante característica, observada en los experimentos, es la transición desde un regimen discontinuo hacia uno continuo, cuando el diámetro del intruso alcanza un valor crítico $D \sim 13d$ [80]. En cambio, las simulaciones numéricas muestran que, para una configuración inicial desordenada, aún se puede observar claramente el regimen discontinuo, para $D \sim 13d$. Sin embargo, el comportamiento discontinuo, prácticamente, desaparece cuando se considera una configuración inicial hexagonal. Además, en el caso de la configuración desordenada y $D \sim 13d$, se observa una transición al regimen continuo a medida que el valor de $\Gamma$ aumenta, ver Fig. 4.1. El tiempo de ascenso del intruso, para una configuración hexagonal, es similar al encontrado en los experimentos. En consecuencia, una descripción detallada de la dinámica de la segregación, no sólo involucra la posición inicial del intruso, sino que además, la preparación inicial del sistema. También se ha observado, en las simulaciones numéricas, que en el regimen discontinuo la presencia del intruso influencia la penetración y la intensidad del rollo de convección. El efecto más notable, consistente con las observaciones experimentales, es la notoria disminución de la intensidad de la convección bajo el intruso, cuando éste se acerca a la superficie. En contraste, el mecanismo de arcos, producto del deslizamiento de las partículas, juega un rol preponderante en la dinámica del ascenso del intruso, cuando éste se aproxima a la zona de decaimiento exponencial de la convección. Es importante mencionar que, hasta donde se sabe, el mecanismo de arcos no ha sido observado experimentalmente en ausencia de convección, lo que también ha sido corroborado por nuestras simulaciones numéricas. Port otro

lado, la convección puede ser suprimida eliminando la fricción en el sistema o utilizando condiciones de borde periódicas. En ambos casos, las simulaciones muestran que, tanto la convección como el ascenso del intruso desaparecen. Como puede deducirse de la Ref. [48], la principal diferencia entre el regimen de arcos y el convectivo radica en la intensidad y la localización del rollo de convección, siendo su intensidad muy débil y ubicándose por encima del intruso cuando se está en presencia del regimen de arcos. Resultados previos reportados en la literatura [98], muestran que, al igual que como se observa en nuestras simulaciones, en el regimen convectivo la penetración del rollo de convección es, aproximadamente, la mitad de la altura del contenedor, esto podría indicar un criterio para la localización inicial del intruso que permitiera observar el regimen de arcos.

En los capítulos anteriores, se ha observado la importancia que tienen los arcos en la dinámica de los sistemas granulares y lo complejo que puede llegar a ser la predicción del comportamiento de estos sistemas. Por ejemplo, la determinación de las condiciones para que ocurra un bloqueo del flujo aún no han sido comprendidas cabalmente. Las dificultades encontradas al intentar modelar los sistemas granulares, tienen grandes consecuencias que abarcan, no sólo al ámbito de la investigación fundamental, sino que también, a los procesos industriales involucrados en actividades de gran importancia económica. Precisamente, uno de estos procesos es la extracción de mineral, en minas subterráneas, mediante el proceso de excavación por bloques. En donde la determinación del comportamiento del mineral fragmentado al interior de la mina, es de vital importancia para fijar las mejores estrategias de extracción y así obtener el mejor costo beneficio posible. Esto nos ha motivado a incluir, en el capítulo siguiente, un estudio del modelo, más ampliamente aceptado en la actualidad, aplicado a la determinación del movimiento de mineral fragmentado, el modelo de Bergmark-Roos. Además, de aplicar a este mismo problema, los modelos de plasticidad y cinemático que, a diferencia del anterior, tienen un fundamento físico apropiado.

# CAPÍTULO 5: APLICACIÓN A LA MINERÍA

Este capítulo está dedicado a la aplicación de algunos de los conceptos desarrollados anteriormente, al problema práctico de la determinación de la zona de descarga, encontrada en los procesos de extracción de material dentro de la minería subterránea.

## 5.1. Introducción

El método de excavación por bloques[1], es un método empleado en la producción minera a gran escala en minas con material de baja ley y de grandes dimensiones, en las que la masa de mineral es susceptible de fragmentarse en trozos de tamaño manejable y la superficie es capaz de hundirse. Estas condiciones limitan la aplicación de este método a depósitos de mineral especiales, tales como minas de hierro y de cobre de baja ley. La excavación por bloques emplea la gravedad, en conjunto con los esfuerzos internos de las rocas, para fracturarlas y romperlas en pedazos manejables por los mineros. La palabra bloques se refiere en este caso a la forma en que se divide la mina. Esta se compone de grandes sectores o bloques, con áreas que pueden alcanzar muchos metros cuadrados, ubicados por debajo del material a extraer, formando una red de túneles, ver Fig. 5.1. Así, la roca situada en la base, es fracturada mediante explosiones, eliminando de esta forma el soporte de las capas superiores. Luego, por efecto de la presión ejercida por la columna de material, las rocas terminan rompiéndose en pequeños pedazos los que van fluyendo hacia la base de la mina, en donde son extraídos a través de sistemas mecánicos. De esta forma, la extracción de mineral es, al menos en teoría, de forma continua, utilizando sólo el efecto de la gravedad o bien con muy poca intervención externa, mediante el uso de taladros o de explosiones controladas. Por consiguiente, la minería de extracción por bloques es un método económico y eficiente para la extracción de mineral a gran escala, siempre que las condiciones de las rocas presentes sean favorables, es

[1]Del inglés *block caving method*.

decir, que faciliten el flujo de material. Sin embargo, es muy difícil predecir, tanto el comportamiento de las rocas al interior de la mina como las condiciones de excavación. Esto convierte a los métodos de predicción en una herramienta fundamental a la hora de decidir la construcción de este tipo de mina. De ahí la importancia de tener métodos de predicción apropiados. La forma en que se construyen las zonas, por donde se extrae el material, tiene una geometría que se asemeja a la mitad superior de un reloj de arena. En consecuencia, se espera que los flujos se parezcan a los encontrados en los silos de descarga, lo que nos permitiría aplicar los conocimientos obtenidos en el estudio del flujo en el reloj de arena, ver Cap. 3, a este proceso de extracción minera. En este caso, se tendría un arreglo de silos subterráneos organizados de forma periódica, donde el objetivo es determinar la distancia apropiada entre silos vecinos, de manera tal de optimizar la extracción del material. La atención estará centrada en la predicción del lugar geométrico desde donde proviene el material extraído, este lugar se conoce con el nombre de "zona de descarga aislada" y depende principalmente del volumen de material extraído. Puesto que, el flujo debido a varios silos es desconocido, usualmente se determina la zona de descarga para un silo aislado y se aproxima, las situaciones de mayor complejidad, mediante la superposición de las zonas de descarga aislada, obtenida para cada uno de estos silos. Una discusión reciente acerca de la importancia de los flujos gravitacionales, los problemas abiertos y las aproximaciones a las aplicaciones mineras puede encontrarse en el trabajo de Rustan [99]. En la actualidad, se considera que la ecuación matemática que mejor describe la forma de la zona de descarga, está dada por la ecuación de Bergmark-Roos, para una revisión ver la Ref. [100]. En este capítulo, se discutirá brevemente el modelo de Bergmark-Roos y se mostrará que el campo de velocidades propuesto en este modelo conduce a un importante incremento en la densidad, a medida que el material granular se acerca a la apertura. Este efecto, es el principal causante de la forma relativamente alargada que presenta la zona de descarga en esta aproximación. Luego, será calculada la zona de descarga aislada a través de un campo de velocidad proveniente de la teoría de plasticidad para flujos de material granular incompresible. Además, se mostrará que la forma de esta zona es prácticamente insensible a la dependencia angular escogida para el flujo. Por otra parte, se verá que la dependencia radial del flujo tiene una influencia crítica, ya que genera zonas de descarga de menor altura y más anchas que las predichas por la aproximación Bergmark-Roos. Tam-

bién se hará uso del modelo cinemático[2] para determinar las líneas de corriente y la zona de descarga, en el caso de una apertura aislada. Además, será utilizada la linealidad de este modelo para obtener información acerca del flujo y las zonas de descarga, producidas por la extracción simultánea de material a través de dos apertura vecinas. Finalmente, por medio del modelo de plasticidad, se ilustrará la forma que posee la zona de descarga, resultante de la extracción alternada de material desde dos aperturas cercanas. Este capítulo será concluido con una breve discusión acerca de las posibles estrategias que pueden ser aplicadas, a la determinación de las líneas de corriente y la forma de las zonas de descarga, mediante el uso del principio de superposición.

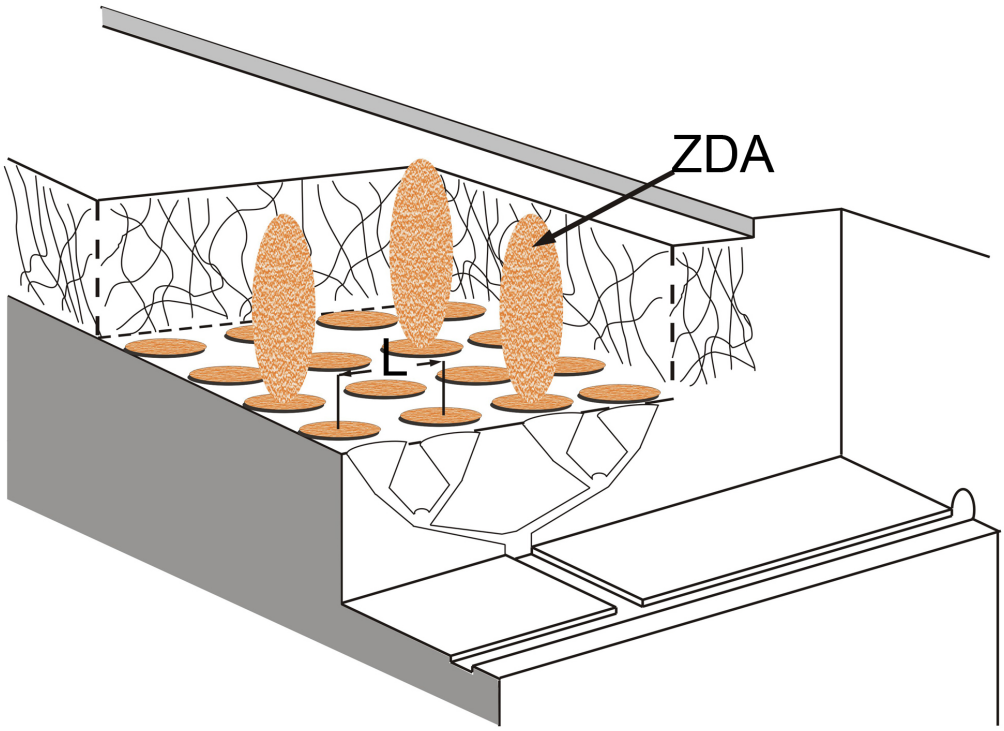


Figura 5.1. Esquema del método de extracción por bloques empleado en la minería subterránea.

[2]Para una breve descripción del modelo cinemático ver el apéndice B.

## 5.2. Modelo de Bergmark-Roos

El modelo de Bergmark-Roos, es considerado en la actualidad como el mejor modelo matemático para la determinación de la zona de descarga, cuando el material es homogéneo o bien cuando se quiere simular la zona de descarga media para un gran número de descargas de mineral, ver por ejemplo [99].

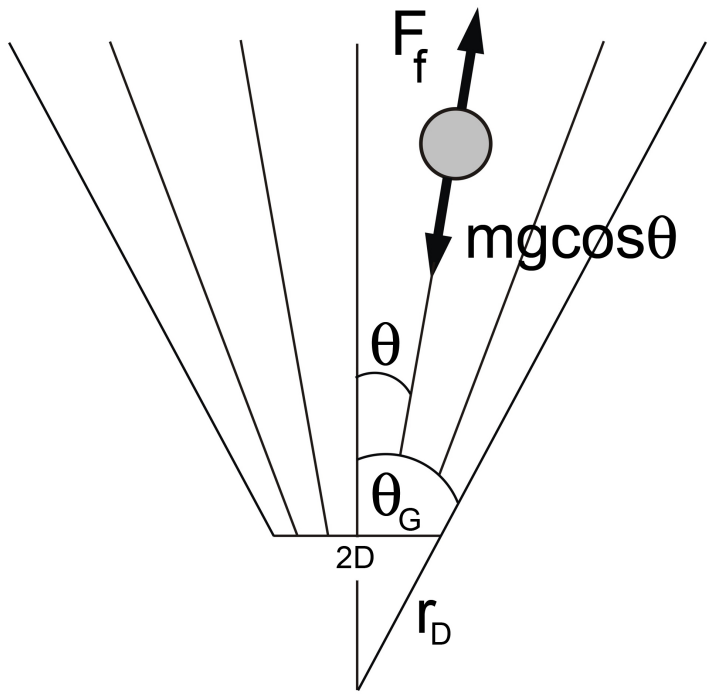


Figura 5.2. Esquema que muestra los parámetros y las fuerzas consideradas en el modelo de Bergmark-Roos, donde $mg$ es la fuerza de gravedad, $F_f$ la fuerza de resistencia al movimiento, $\theta$ la posición angular de la roca, medida desde la vertical y $\theta_G$ es el máximo ángulo permitido, medido desde la vertical, para el cual las rocas pueden fluir, más allá de este valor las rocas permanecen inmóviles.

En esta teoría se supone que el movimiento de las partículas ocurre en la dirección radial y que la aceleración viene dada por $a_r(\theta) = g(\cos\theta - \cos\theta_G)$, donde $\theta$ es el ángulo medido desde la vertical y $\theta_G$ es el máximo valor permitido para el desplazamiento, es decir, el ángulo para el cual la fuerza de fricción compensa el peso de las partículas [100], ver Fig. 5.2. Además, esta teoría supone que todas las partículas están inicialmente en reposo. De esta forma, el campo de velocidades está dado por $v_r = -a_r(\theta)t$ y $v_\theta = 0$. Integrando se obtiene la posición radial

en función del tiempo y del ángulo

$$r(\theta, t) = r_0(\theta) - \frac{1}{2}a_r(\theta)t^2, \tag{5.1}$$

donde $r_0 = r(\theta, t = 0)$ es la posición inicial de las partículas que pasan por la apertura en un tiempo dado $t$. Suponiendo que la apertura está ubicada a una distancia $r_D$, desde el origen de coordenadas, entonces, el diámetro de la apertura está dado por $2D = 2r_D \sin\theta_G$. De esta forma, la zona de descarga como función del tiempo de extracción viene dada por

$$r_0(\theta, t) = r_D + \frac{1}{2}g(\cos\theta - \cos\theta_G)t^2. \tag{5.2}$$

Nótese que, el valor máximo para la posición radial se obtiene cuando $\theta = 0$. Utilizando este valor, se puede expresar el tiempo como función del radio máximo $r_{max}$ a través de

$$\frac{1}{2}gt^2 = \frac{r_{max} - r_D}{1 - \cos\theta_G}. \tag{5.3}$$

Luego, la zona de descarga se puede escribir como

$$r_0(\theta, r_{max}) = r_D + (r_{max} - r_D)\frac{\cos\theta - \cos\theta_G}{1 - \cos\theta_G}. \tag{5.4}$$

Conocido el campo de velocidades, es posible determinar la densidad local del material $\rho(r, t)$ a través de la ecuación de continuidad. Como primer caso, considérese un sistema bidimensional, entonces, en coordenadas cilíndricas se tiene

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = 0. \tag{5.5}$$

La solución general de esta ecuación se escribe como

$$\rho(r, t) = \frac{1}{r}f(r + \frac{a_r(\theta)t^2}{2}), \tag{5.6}$$

donde $f$ es una función determinada por la densidad inicial del sistema. Si se supone que ésta es constante, $\rho_0$, entonces, en $t = 0$ se tiene $f = \rho_0 r$. Así, la densidad se puede escribir como

$\rho = \rho_0 \frac{r_0}{r}$, donde $r_0$ es la posición inicial de la partícula ubicada en $r$ en el tiempo $t$. De esta forma, si la partícula no se mueve, ningún cambio en la densidad podrá ser observado. Por otro lado, si un elemento se mueve hacia el origen experimentará un aumento en la densidad, el que depende de la distancia recorrida. Una vez conocida la densidad, se puede determinar la sección de la zona de descarga, integrando el flujo de masa que atraviesa la apertura

$$
\begin{aligned}
S_0 &= -\int_{-\theta_G}^{\theta_G}\int_0^t \frac{\rho(r_D,t')}{\rho_0} v_r r_D d\theta dt' && (5.7)\\
&= \int_{-\theta_G}^{\theta_G}\int_0^t \rho_0(\theta,t')a(\theta)t' d\theta dt' && (5.8)\\
&= \int_{-\theta_G}^{\theta_G}\int_0^t \frac{1}{2}\frac{dr_0^2(\theta,t')}{dt'} d\theta dt' && (5.9)\\
&= \int_{-\theta_G}^{\theta_G} \frac{1}{2}(r_0^2(\theta,t) - r_D^2) d\theta. && (5.10)
\end{aligned}
$$

Finalmente, integrando en el ángulo, se obtiene la sección $S_0$ en función del radio máximo $r_{max}$

$$
\begin{aligned}
S_0 = \left(\frac{r_{max}-r_D}{1-\cos\theta_G}\right)\Bigg\{ & 2r_D\left(\sin\theta_G - \theta_G\cos\theta_G\right)\\
& -\left(\frac{r_{max}-r_D}{1-\cos\theta_G}\right)\left(3\sin\theta_G\cos\theta - 2\theta_G\cos^2\theta_G - \theta_G\right)\Bigg\}. \qquad (5.11)
\end{aligned}
$$

En tres dimensiones, la ecuación de continuidad se escribe como

$$
\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} = 0. \qquad (5.12)
$$

Procediendo de manera análoga al caso bidimensional, si la densidad inicial es constante $\rho_0$, entonces, se tiene para la densidad

$$
\rho(r,t) = \frac{1}{r^2}\left(r + \frac{a_r(\theta)t^2}{2}\right)^2. \qquad (5.13)
$$

Nuevamente, se puede escribir para la zona de descarga una ecuación idéntica a la Ec. 5.4. Mientras que, el volumen de la zona de descarga viene dado por

$$\Omega_0 = \frac{\pi}{6}(1-\cos\theta_G)\left[r_{max}^3 - r_D^3 + r_{max}^2 r_D + r_{max} r_D^2\right]. \tag{5.14}$$

Expresión que se convierte en la fórmula de Bergmark-Roos para una zona de descarga aislada [100], cuando $r_{max} \gg r_D$. La solución de la ecuación de tercer grado 5.14 nos permite determinar el valor de la altura máxima de la zona de descarga, en función del volumen de extracción $\Omega_0$ y el radio de la apertura $r_D$.

El modelo de Bergmark-Roos predice un fuerte incremento en la densidad a medida que el material granular se aproxima a la salida, ver Ecs. 5.6 y 5.13, lo que nos hace creer que este modelo no es físicamente correcto. Por otro lado, no es sorprendente que el modelo de Bergmark-Roos sea capaz de predecir aproximadamente la forma de las zonas de descarga observadas, ya que en éste se conserva la masa total a través de la condición para el volumen.

## 5.3. Modelo de plasticidad

En la sección anterior se ha obtenido la forma de la zona de descarga, a partir del campo de velocidad, utilizando las suposiciones de Bergmark-Roos. Se debe recordar que, este modelo presenta un aumento en la densidad del material a medida que las partículas se aproximan a la salida. En consecuencia, es interesante comparar este resultado con el que se obtendría con un modelo que, aparte de satisfacer la ecuación de continuidad, no tenga el problema del aumento de la densidad. Un modelo que cumple con estas condiciones es la teoría de plasticidad [2]. En los flujos tridimensionales, tanto el flujo radial como el azimutal no se conocen con precisión, puesto que dependen de las variables geométricas y las características de las partículas. Sin embargo, en los flujos gravitacionales con simetría axial, es razonable suponer que la velocidad azimutal se anula. Se debe mencionar que, la aproximación de flujo radial para silos con fondo plano se desvía en forma apreciable cerca de la apertura, donde las líneas de corriente muestran cierta curvatura. La incompresibilidad queda asegurada al imponer una dependencia $1/r^2$ para la velocidad radial con lo cual se tiene

$$v_r = -\frac{v_0 r_D^2}{r^2} f(\theta,\phi), \tag{5.15}$$

donde $\theta$ es la posición angular medida desde la vertical, $r_D$ es la posición radial de la apertura, cuyo radio esta dado por $r_D \sin\phi$ y $v_0$ es la velocidad al centro de la apertura. En el caso de los silos cónicos, $\phi = \theta_w$ es el ángulo del contenedor y $f(\theta, \phi)$ se escoge de forma de respetar las condiciones de borde impuestas por la pared lateral del silo, la que en general, será una función de la fricción de la pared. Esta aproximación es menos clara cuando el silo tiene un fondo plano, sin embargo, será utilizada sólo como punto de comparación con el modelo de Bergmark-Roos. En este caso, $\phi = \theta_G$, es el ángulo de deslizamiento interno y se elige $f$ de manera tal que se anule para este ángulo, es decir $f(\theta = \theta_G) = 0$. Ha sido observado experimentalmente, en una variedad de silos, que el flujo bidimensional puede ser representado por un campo de velocidad radial de la forma

$$v_r = -\frac{v_0 r_D}{r} \cos\left(\frac{\pi\theta}{2\theta_G}\right). \tag{5.16}$$

Generalizando al caso en tres dimensiones, se puede escribir

$$v_r = -\frac{v_0 r_D^2}{r^2} \cos\left(\frac{\pi\theta}{2\theta_G}\right). \tag{5.17}$$

Integrando esta ecuación en el tiempo se obtiene las trayectorias y a través de éstas la zona de descarga. De esta forma, la zona de descarga en términos del radio máximo $r_{max}$ se escribe como

$$r_0(\theta)^3 = r_D^3 + (r_{max}^3 - r_D^3) \cos\left(\frac{\pi\theta}{2\theta_G}\right). \tag{5.18}$$

Además, el radio máximo está relacionado con el volumen de extracción a través de

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{3} \left[\frac{r_{max}^3 - r_D^3}{(\frac{\pi}{2\theta_G})^2 - 1}\right] \left(\frac{\pi}{2\theta_G} \sin\theta_G - 1\right). \tag{5.19}$$

Si, esta vez, se considera una dependencia angular similar a la introducida por Bergmark-Roos $f(\theta) = \cos\theta - \cos\theta_G$, entonces, la zona de descarga viene dada por

$$r_0(\theta)^3 = r_D^3 + (r_{max}^3 - r_D^3) \left(\frac{\cos\theta - \cos\theta_G}{1 - \cos\theta_G}\right). \tag{5.20}$$

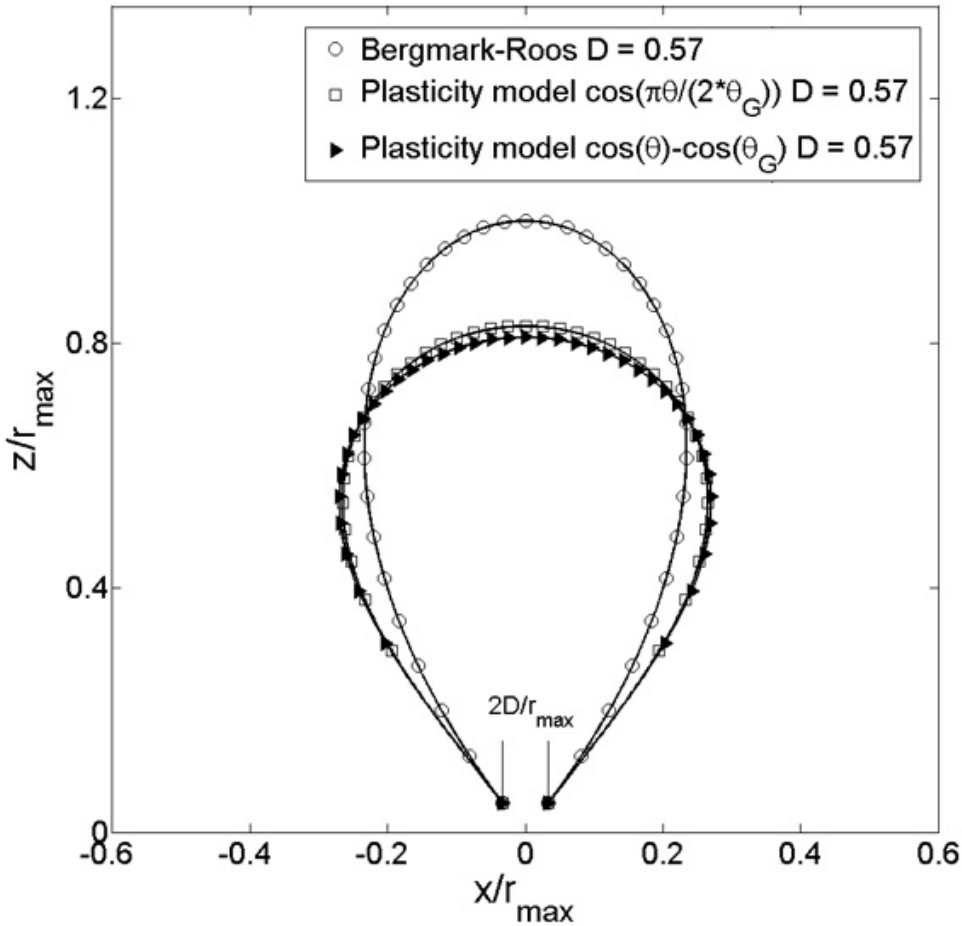


Figura 5.3. Contraste entre las zonas de descarga obtenidas mediante el modelo de Bergmark-Roos Ec. 5.4 y el modelo de plasticidad Ecs. 5.18 y 5.20.

Mientras que, el volumen de extracción se escribe como:

$$\Omega_0 = \frac{\pi}{3}(r_{max}^3 - r_D^3)\left[\frac{\cos^2\theta_G - 2\cos\theta_G + 1}{1-\cos\theta_G}\right]. \tag{5.21}$$

Al comparar la forma de las zonas de descarga, obtenidas mediante el modelo de Bergmark-Roos y el modelo de plasticidad, se observa que la primera alcanza una altura notoriamente mayor y resulta ser más alargada que la segunda, ver Fig. 5.3. Esto se debe a que el modelo de Bergmark-Roos no es incompresible, ya que la densidad del material aumenta a medida que se acerca a la salida con el paso del tiempo. Esto se traduce en una sobre estimación de la velocidad radial, en las regiones donde la aceleración efectiva es grande permitiendo que

partículas ubicadas relativamente más lejos, sean capaces de alcanzar la salida alargando la forma de la zona de descarga. También, se puede notar que, la forma de la zona de descarga deteminada por el modelo de plasticidad es, prácticamente, insensible a la forma funcional de la dependencia angular $f(\theta)$ seleccionada. Sin embargo, pequeñas variaciones en el valor del ángulo $\theta_G$ son capaces de producir cambios notorios en el radio máximo $r_{max}$ lo que implica que el valor de $\theta_G$ debe ser determinado con precaución.

## 5.4. Modelo cinemático

Las características del flujo en silos con fondo plano, en el caso en que el material granular tiene un empaquetamiento suelto, pueden ser predecidas bastante bien mediante el modelo cinemático. En el caso tridimensional, se supone que las componentes de la velocidad en el plano $x - y$ son proporcionales a las variaciones de la velocidad vertical, esto es, $v_x = -D_P \partial v_z/\partial x$ y $v_y = -D_P \partial v_z/\partial y$. Aplicando la condición de incompresibilidad se obtiene para la velocidad vertical la siguiente ecuación

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = D_P \left[ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right]. \tag{5.22}$$

La solución de esta ecuación entrega las líneas de corriente, las que junto con las trayectorias nos permiten encontrar la zona de descarga. Considérese un silo bidimensional, entonces, $v_x = -D_P \partial v_y/\partial x$ y $\partial v_y/\partial y = D_P \partial^2 v_y/\partial x^2$. Suponiendo que la apertura es infinitamente angosta, se puede escribir la solución de los campos de velocidad como

$$v_x = -\frac{Q}{\sqrt{4\pi D_P y}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_P y}\right) \tag{5.23}$$

$$v_y = -\frac{Q}{\sqrt{4\pi D_P y}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_P y}\right) \left(\frac{x}{2y}\right), \tag{5.24}$$

donde $Q$ es la razón de flujo seccional, es decir, la sección del material extraído por unidad de tiempo. Luego, aplicando la ecuación para las líneas de corriente, $dx/v_x = dy/v_y$ se obtiene la siguiente condición

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{2y}, \tag{5.25}$$

cuya solución está dada por

$$y = cx^2, \tag{5.26}$$

donde $c$ es una constante que nos permite seleccionar las diferentes líneas de corriente. Mediciones experimentales sobre las líneas de corriente hechas por Caram y Hong [42], muestran que, en una configuración cuasi bidimensional, el modelo difusivo logra reproducir bastante bien las líneas de corriente observadas. También se logra un buen acuerdo entre este modelo y los campos de velocidad en los flujos en silos bidimensionales, cuando los granos no están compactados [31]. Este acuerdo va perdiéndose cuando el material comienza a compactarse, ver por ejemplo [101]. Integrando en el tiempo las ecuaciones para las componentes de la velocidad, se obtienen las trayectorias de las partículas e introduciendo la ecuación para las líneas de corriente, Ec. 5.26, se tiene

$$\frac{4}{3}\sqrt{\pi c^3 D_P}(x_0^3 - x^3)\exp\left(\frac{1}{4D_P c}\right) = Qt \tag{5.27}$$

o bien en términos de la coordenada $y$

$$\frac{4}{3}\sqrt{\pi D_P}(y_0^{3/2} - y^{3/2})\exp\left(\frac{1}{4D_P c}\right) = Qt, \tag{5.28}$$

donde $x_0$ e $y_0$ son las coordenadas de la partícula en $t = 0$. Estas ecuaciones permiten determinar la trayectoria de todas las partículas del sistema en función del tiempo. Para encontrar la zona de descarga sólo se necesita determinar las coordenadas iniciales, $x_0$ e $y_0$, de las partículas que en el tiempo $t$ cruzan por la apertura, $y = 0$

$$\frac{4}{3}\sqrt{\pi D_P}\exp\left(\frac{x_0^2}{4D_P y_0}\right) y_0^{3/2} = Qt. \tag{5.29}$$

Así, la zona de descarga viene dada por $y_0 = y_0(x_0, t)$, para un tiempo $t$ y una razón de extracción $Q$ dados. La ecuación 5.29 es de carácter trascendental por lo que no es posible obtener una expresión analítica para la zona de descarga. Sin embargo, las coordenadas de esta zona pueden ser fácilmente calculadas en forma numérica, mediante el uso de la técnica de

Newton-Rapson, ver por ejemplo [78]. En cambio, sí es posible determinar en forma analítica la altura máxima $y_0^{max}$ y el ancho máximo $w_0^{max}$. En efecto, buscando los valores extremos mediante las condiciones $\partial y_0/\partial x_0 = 0$ y $\partial x_0/\partial y_0 = 0$ para la altura máxima y el ancho máximo respectivamente, se obtiene

$$y_0^{max} = \left(\frac{3Qt}{2\sqrt{4\pi D_P}}\right)^{2/3} \tag{5.30}$$

y

$$w_0^{max} = 2\sqrt{6D_P y_0^*} \tag{5.31}$$

donde

$$y_0^* = \left[\exp\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\frac{Qt}{\sqrt{4\pi D_P}}\right)\right]^{2/3}. \tag{5.32}$$

Debido a que se ha considerado el caso en que la apertura es infinitamente angosta, la forma de la zona de descarga obtenida sólo tiene validez cuando el ancho es mucho mayor que el tamaño de la apertura. De manera análoga a la empleada en el caso bidimensional, se puede determinar la forma de la zona de descarga en tres dimensiones en el caso de una apertura simétrica e infinitamente pequeña. Escribiendo la ecuación de difusión en coordenadas cilíndricas y considerando simetría axial, se tiene

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = D_P\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right], \tag{5.33}$$

cuya solución para una apertura infinitamente pequeña está dada por

$$v_z = -\frac{Q}{4\pi D_P z}\exp\left(-\frac{r^2}{4D_P z}\right). \tag{5.34}$$

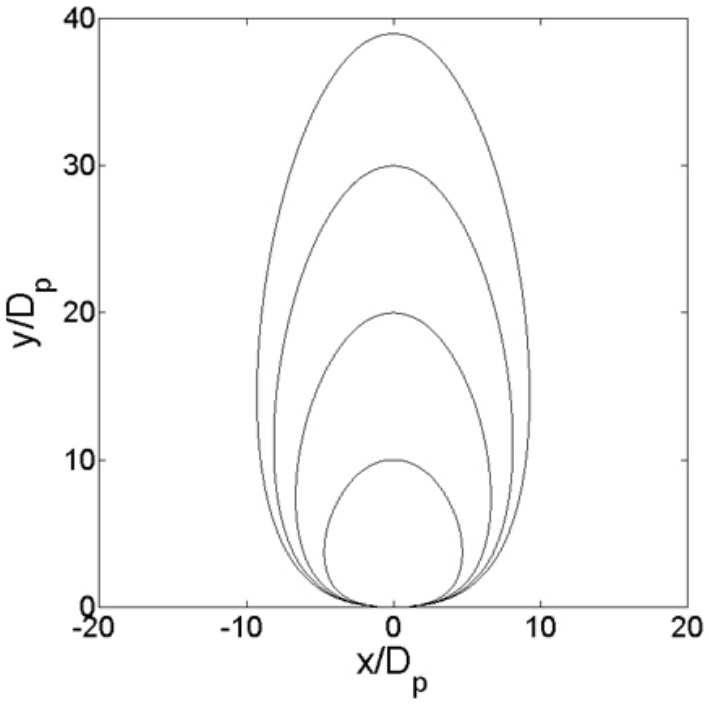


Figura 5.4. Las líneas delimitan las zonas de descarga, calculadas a partir de la Ec. 5.35, para diferentes cantidades de material extraído, $Qt = 75, 210, 390, 580$, expresadas en unidades de $D_P^2$, donde $D_P = 1$ esta en unidades arbitrarias.

Tal como en el caso anterior, las líneas de corriente tienen forma parabólica, $z = cr^2$ con lo cual la ecuación que nos permite determinar la forma de la zona de descarga se escribe como

$$2\pi D_P \exp\left(\frac{r_0^2}{4D_P z_0}\right) = Qt, \tag{5.35}$$

donde $Q$ representa la razón de flujo volumétrico. En este caso, la altura máxima $z_0^{max}$ y el radio máximo $r_0^{max}$, están dados por

$$z_0^{max} = \left(\frac{Qt}{2\pi D_P}\right)^{1/2} \tag{5.36}$$

$$r_0^{max} = 2\sqrt{8D_P z_0^*}, \tag{5.37}$$

donde

$$z_0^* = \left[\exp(-2)\frac{Qt}{2\pi D_P}\right]^{1/2}. \tag{5.38}$$

En la Fig. 5.4 se muestra el límite de la zona de descarga para diferentes valores de la cantidad de material extraído $Qt$. Se puede observar que a medida que aumenta la cantidad de material extraído la forma de la zona de descarga comienza a elongarse.

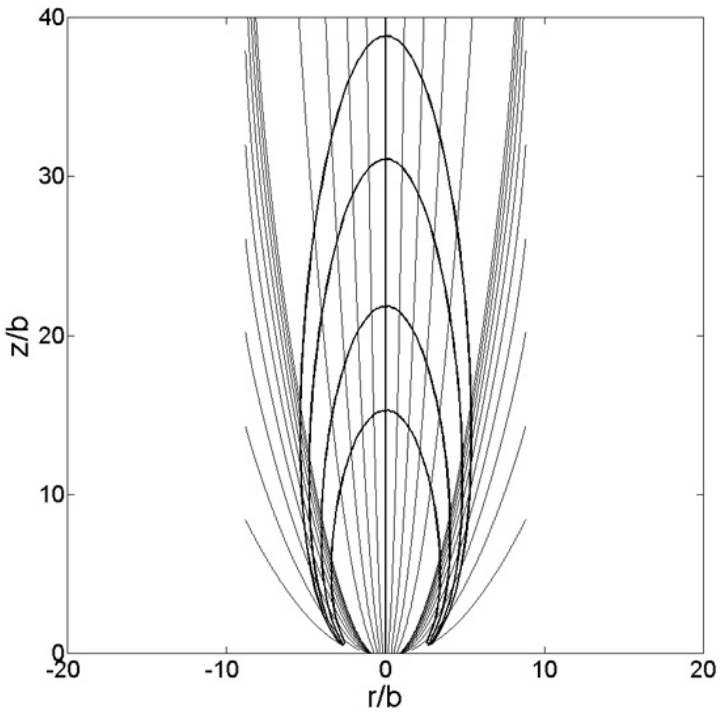


Figura 5.5. Zona de extracción para un agujero aislado de tamaño finito para los parámetros: coeficiente de difusión $D_P = 0{,}5$, radio de la apertura $b = 2$, radio del contenedor $a = 20b$ y altura máxima de la zona de descarga $z_{max}/b = 15, 22, 31, 39$. Todas las cantidades están expresadas en unidades arbitrarias.

A continuación se determinará el efecto que produce una apertura de tamaño finito, situación que reviste mayor interés debido a su potencial aplicación a situaciones reales. En este caso, la forma general de la distribución de velocidad vertical se escribe como

$$v_z = \sum_n \frac{2v_0}{(\beta_n b)J_0^2(\beta_n a)} \exp(-\beta_n^2 D_P z) J_1(\beta_n b) J_0(\beta_n r), \tag{5.39}$$

donde $D_P$ es el coeficiente de difusión, $a$ es el radio del contenedor, $b$ es el radio de la apertura, $J_0$ y $J_1$ son las funciones de Bessel de primera clase de orden $0$ y $1$ y $\beta_n a$ son los ceros de $J_1$, ver Cap. $8$ en Ref. [2]. Las líneas de corriente se calculan numéricamente, integrando las componentes de la velocidad, mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden. En la Fig. 5.5 se puede ver la zona de extracción para distintas valores de la altura máxima, el efecto del tamaño finito de la apertura se observa claramente en la parte inferior del contenedor, esto es, cerca de la salida. Por otro lado, el ancho máximo está dado aproximadamente por $w_0^{max} \sim 2(b + \sqrt{D_P z_0^{max}})$.

## 5.5. Zona de descarga para varias aperturas

Se ha determinado la forma de la zona de descarga para una apertura aislada. A continuación, se verá como es afectada esta zona cuando existe una segunda apertura cercana. Dos situaciones importantes son las que se pueden distinguir aquí, las cuales están determinadas por la estrategia empleada en la extracción del mineral. En algunas ocasiones es útil conocer la forma de la zona de descarga que se obtiene al extraer, en forma continua, material de ambas aperturas simultáneamente. Es mucho más frecuente, sin embargo, la extracción en forma alternada, es decir, en una apertura y luego en la apertura más cercana. Este proceso puede ser fácilmente generalizado al caso de $n$ aperturas. En primer lugar, será estudiado el caso de la extracción simultánea, para luego abordar la extracción alternada en dos aperturas.

### 5.5.1. Extracción simultánea por dos aperturas

Considerando como marco de referencia el modelo cinemático, el cual es una aproximación lineal al flujo global, se tiene que el flujo debido a un número finito de aperturas viene dado por la superposición de los flujos individuales. En términos del campo de velocidad, esto se traduce en

$$\vec{v} = \sum_{\vec{L}_i} \vec{v}_{Q_{0i}}(\vec{x} - \vec{L}_i), \tag{5.40}$$

donde $\vec{v}_{Q_{0i}}$ es el campo de velocidad producido por una apertura aislada, con un flujo total dado por $Q_{0i}$ en la apertura *i-ésima*. Este resultado puede ser de gran utilidad en las apli-

caciones mineras, puesto que sólo es necesario conocer el flujo producido por una apertura aislada para reconstruir el flujo en múltiples aperturas, teniendo cuidado de manejar de manera apropiada las condiciones de borde impuestas en la base del sistema. Por simplicidad se calculará, en la aproximación cinemática, las líneas de corriente y la zona de descarga utilizando dos aperturas infinitamente pequeñas separadas una distancia dada. Supongamos que ambas aperturas se ubican a igual distancia del origen y que la distancia de separación entre ambas es $2L$, entonces, la velocidad vertical se escribe de la siguiente forma

$$v_y = -\frac{Q}{\sqrt{4\pi D_P y}}\left[\exp\left(-\frac{(x-L)^2}{4D_P y}\right) + \exp\left(-\frac{(x+L)^2}{4D_P y}\right)\right], \tag{5.41}$$

donde se ha considerado que el flujo volumétrico $Q$ es idéntico en ambas aperturas. Empleando la ecuación para las líneas de corriente se obtiene

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2y}\left[x - L\tanh\left(\frac{xL}{2D_P y}\right)\right]. \tag{5.42}$$

Claramente, el término de interacción, debido a la proximidad de las aperturas, está contenido en la tangente hiperbólica. Obtener una solución analítica para las líneas de corriente es muy difícil en este caso. Sin embargo, en el límite $x \sim \pm L$ e $y$ suficientemente pequeño, como para saturar el valor de la tangente hiperbólica a $\pm 1$, las líneas de corriente se aproximan a parábolas centradas en cada apertura. Mientras que, en la región de más alta interacción $x \sim 0$ y $xL/2D_P y \ll 1$, la ecuación para las líneas de corriente se transforma en

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2y}\left[x - \frac{xL^2}{2D_P y}\right], \tag{5.43}$$

cuya solución está dada por

$$cx^2 = y\exp\left(\frac{L^2}{2D_P y}\right). \tag{5.44}$$

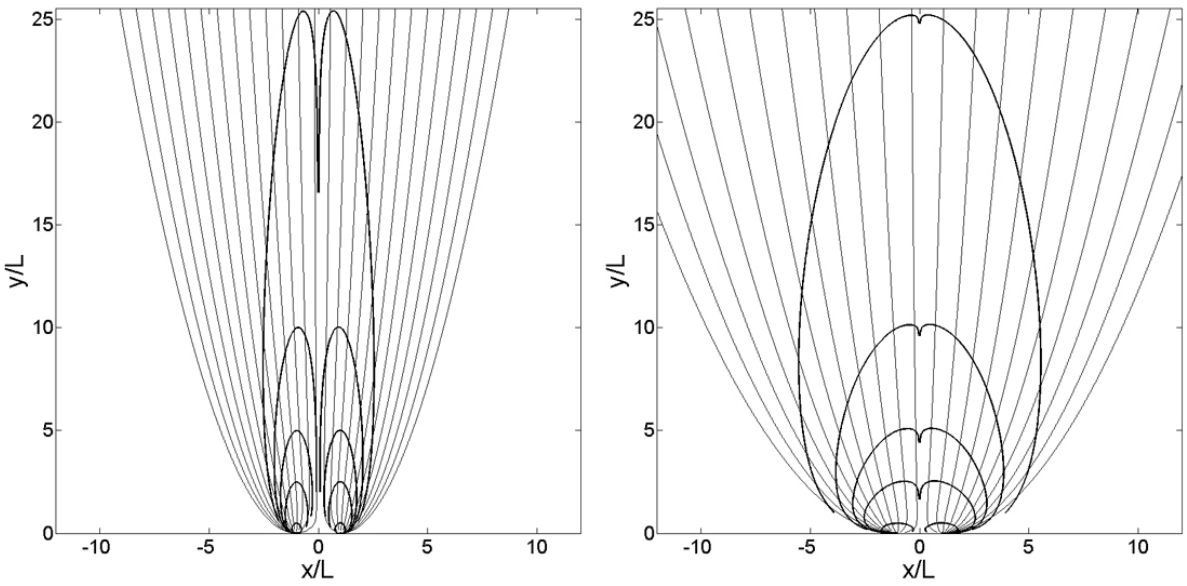


Figura 5.6. Forma de la zona de extracción para diferentes volúmenes de extracción, para una distancia de separación $L = 2$ y un coeficiente de difusión $D_P = 0{,}5$ (izquierda) y $D_P = 1{,}0$ (derecha), ambos expresados en unidades arbitrarias. Las alturas máximas son $y_{max}/L = 0{,}5, 2{,}5, 10, 25{,}4$.

Al igual que antes, $c$ es una constante que identifica las distintas líneas de corriente. Esta solución aproximada nos indica que, en la región de interacción, las líneas de corriente son prácticamente paralelas al eje vertical. Además, la transición de parábolas a líneas rectas verticales ocurre a una distancia vertical dada por $y_{\|} \sim L^2/2D_P$. Los resultados obtenidos, mediante la aproximación antes mencionada, nos permiten tener una idea del comportamiento de las líneas de corriente. Desafortunadamente, no es posible expresarlas en una forma algebraica cerrada, lo que dificulta la obtención de la zona de descarga. Nuevamente, se debe determinar en forma numérica, tanto las líneas de corriente como la zona de descarga. Esta vez, el algoritmo consiste en integrar el campo de velocidades desde alguna altura conocida hasta la base del sistema, utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Luego, se calcula la posición de los puntos que conforman el límite de la zona de descarga siguiendo la trayectoria de las partículas desde el punto final hacia el punto de inicio durante un tiempo dado. En otras palabras, el proceso corresponde a invertir el tiempo y la velocidad en las ecuaciones del campo de velocidad. En la Fig. 5.6 se muestran varias zonas de descarga para

distintos volúmenes de extracción. Para volúmenes de extracción pequeños se tiene una zona de descarga bien definida en cada una de las aperturas, es decir, las zonas no interactúan. A medida que aumenta el volumen extraído estas zona comienzan a acercarse hasta que se tocan. Si el volumen continua aumentando se genera una zona de flujo casi vertical alrededor de $x = 0$. La distancia vertical en la que la interacción se vuelve dominante está dada aproximadamente por $y_{int} \sim L^2/2D_P$. Por otro lado, si el tamaño de la apertura es finito una nueva escala aparecerá. Se puede anticipar que, la región de interacción será importante a distancias verticales dadas por $y_{int} \sim (L - D)^2/2D_P$, donde $D$ es el tamaño de la apertura. Experimentos realizados en una configuración bidimensional [102], muestran que, para el caso en que el sistema de partículas no está compactado, el principio de superposición entrega buenos resultados cuantitativos, tanto para el flujo como para la zona de descarga. La generalización de la zona de descarga, para aperturas finitas en tres dimensiones es directa, aunque debe tenerse en cuenta que la determinación de esta zona debe ser realizada numéricamente.

### 5.5.2. Extracción alternada por dos aperturas

A diferencia de la extracción simultánea, en el caso de la extracción alternada, la determinación de la forma de la zona de descarga se dificulta, debido a que no corresponde a la superposición de las zonas de descarga aislada producidas por cada una de las aperturas. Para ilustrar las características principales de la zona de descarga, producida por una extracción alternada, será considerado un flujo radial y el comportamiento angular del modelo de Bergmark-Roos en tres dimensiones. Supongamos que las aperturas están ubicadas a lo largo del eje $y$ separadas una distancia $L$, en las posiciones $0$ y $L$, ver el esquema que se muestra en la Fig. 5.7. Las aperturas son circulares de radio $r_D \sin\theta_G$, donde $r_D$ es la distancia medida desde el origen de coordenadas, relativo a cada orificio, hasta el borde de la apertura y $\theta_G$ es el máximo ángulo permitido para el flujo de material. Sean $\vec{r}_0$ y $\vec{r}_L$ los vectores que representan la posición de las partículas con respecto al sistema de coordenadas propio de cada agujero. Entonces, se tiene que $r_0^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $r_L^2 = x^2 + (y - L)^2 + z^2$, $\cos\theta_0 = z/r_0$ y $\cos\theta_L = z/r_L$. Así, las zonas de descarga aisladas pueden ser escritas como

$$^{id}r_0 = r_D + (r_{max} - r_D)\left(\frac{\cos\theta_0 - \cos\theta_G}{1 - \cos\theta_G}\right) \tag{5.45}$$

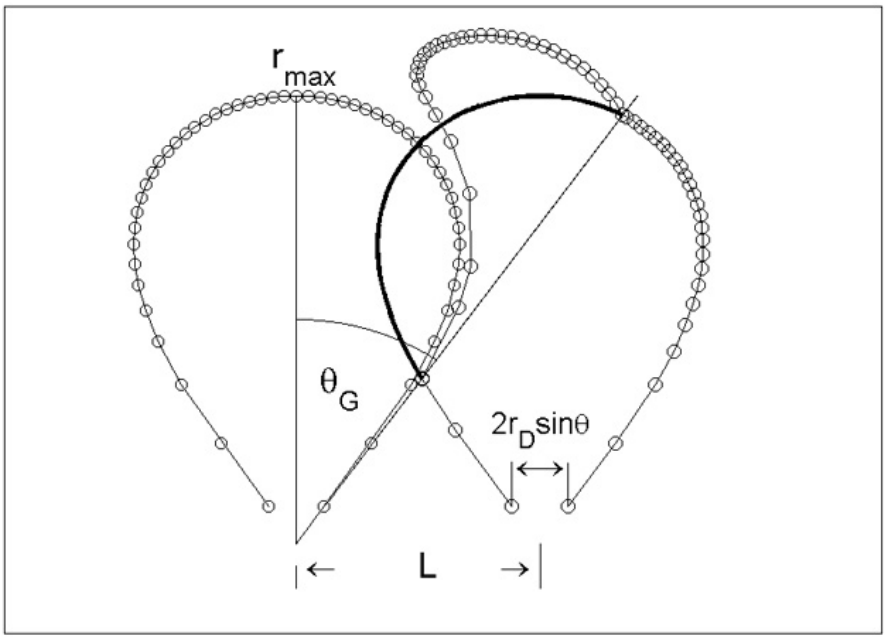


Figura 5.7. Forma de la zona de descarga luego de una extracción alternada. Inicialmente, las partículas son extraídas desde el agujero izquierdo y posteriormente, desde el derecho. La línea sólida oblicua cuya inclinación $\theta_G$ genera un cono de revolución centrado en $x = 0$ delimita la región de interacción. Los parámetros son la altura máxima de la zona de extracción aislada $r_{max} = 10$, el máximo ángulo permitido para el desplazamiento $\theta_G = 35°$, el radio de cada apertura $r_D \sin\theta_G = 1$ y la distancia de separación entre los agujeros $L = 5$. Todas las distancias están expresadas en unidades de longitud arbitrarias.

$$ {}^{id}r_L = r_D + (r_{max} - r_D)\left(\frac{\cos\theta_L - \cos\theta_G}{1 - \cos\theta_G}\right). \tag{5.46} $$

Ahora, supongamos que se extrae material durante un tiempo $t_0$ desde el agujero ubicado en $y = 0$, esto define la forma de la primera zona de descarga aislada y su altura máxima $r_{max}(t_0)$. Esto significa que, todas las partículas ubicadas dentro de la región determinada por ${}^{id}r_0(t_0)$ cruza la apertura en $y = 0$. El movimiento de estas partículas influencia el entorno, de forma tal que, partículas situadas más lejos, se trasladan hasta la zona de descarga inicial, durante este tiempo. Luego, se extrae material desde el otro agujero, $y = L$, durante un tiempo $t_L$. Nuevamente, se tiene que las partículas situadas al interior de la región definida por ${}^{id}r_L(t_L)$ cruzarán la apertura ubicada en $y = L$. En consecuencia, la zona de descarga global después

de una extracción alternada, que involucra ambos agujeros, quedará definida por la posición inicial de todas las partículas que hayan cruzado alguno de estos dos agujeros. Esto se reduce a calcular la posición inicial de todas las partículas que, después de un tiempo $t_0$, se ubican en la frontera de la zona de descarga aislada centrada en $y = 0$ y cuyo volumen de extracción está definido por $t_L$. De esta forma, se tiene

$$^{id}r_{L\to 0}(t_L) = r_0(t_0) - (r_{max}(t_0) - r_D)\left(\frac{\cos\theta_0 - \cos\theta_G}{1 - \cos\theta_G}\right), \tag{5.47}$$

donde $^{id}r_{L\to 0}(t_L)$ representa la forma de la zona de descarga centrada en $y = L$ expresada en las coordenadas centradas en $y = 0$. En términos geométricos, la fórmula 5.47 se puede interpretar como la frontera de la zona de descarga con origen en $y = L$ desplazada con respecto a $y = 0$ en la dirección radial, una distancia equivalente a $(r_{max}(t_0) - r_D)((\cos\theta_0 - \cos\theta_G)/(1 - \cos\theta_G))$.

Análogamente, se tiene para el caso del modelo de plasticidad la siguiente expresión para la zona de descarga de interacción

$$^{id}r^3_{L\to 0}(t_L) = r_0^3(t_0) - 3r_D^2 V_0 t_0(\cos\theta_0 - \cos\theta_G). \tag{5.48}$$

El procedimiento para calcular la forma de la zona de descarga total, para tiempos de extracción iguales $t_L = t_0$, se ilustra en la Fig. 5.7. Nótese que, para ángulos $\theta_0 \geq \theta_G$ la frontera de la zona de descarga de interacción coincide con las correspondientes zonas de descarga aislada, puesto que el primer flujo no afecta estas regiones. Por otra parte, la curva gruesa representa la zona de descarga aislada que, efectivamente, se ve afectada por el flujo inicial. En la Fig. 5.8, se muestran las predicciones obtenidas desde la Ec. 5.48 para distintas distancias de separación $L$. Cuando la distancia de separación es levemente mayor que el ancho de la zona de descarga aislada, se observa que no existe interacción entre las zonas de descarga de ambos agujeros, entonces, la frontera queda definida por ambas zonas de descarga aisladas. En cambio, al reducir la distancia de separación, se observa que, aparece una forma no trivial para la zona de interacción. Así, a través de este modelo, la zona de descarga de interacción aparecerá sólo si alguna porción de la zona de descarga aislada, centrada en $y = L$, se ubica en la sección angular determinada por la línea recta de la Fig. 5.7, en donde tuvo lugar el primer flujo. Se debe mencionar que, la distancia de separación para la cual no existe interacción,

entre ambas zonas de descarga, depende del volumen de extracción o, equivalentemente, del tiempo empleado en la extracción. Esto significa que, si se considera un tiempo lo suficientemente grande, es posible que las zonas interactúen aún cuando éstas se encuentren muy separadas.

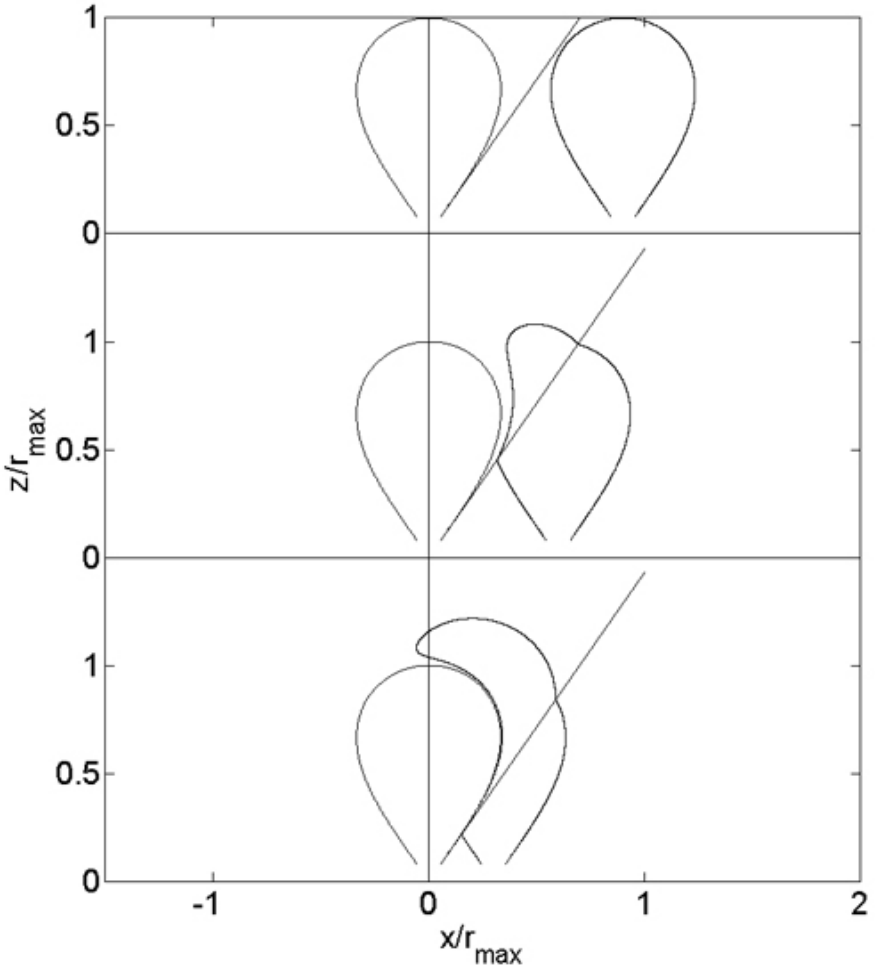


Figura 5.8. Forma de la zona de extracción en modo alternado, para diferentes distancias de separación, $L = 3, 6, 9$. Los parámetros son $r_{max} = 10$, $r_D = 1$ y $\theta_G = 35°$. Todas las distancias están expresadas en unidades de longitud arbitrarias. La zona de descarga resultante deja de tener simetría de revolución.

## 5.6. Conclusiones

Las zonas de descarga, determinadas mediante flujos radiales, son insensibles al modelo utilizado para predecir el flujo, siempre que la dependencia angular sea introducida en forma correcta. El modelo cinemático es apropiado para predecir el flujo y la zona de descarga cuando el sistema no está en un estado compactado, sino más bien suelto. Por otro lado, gracias a la linealidad del modelo cinemático, es posible aplicarlo a los casos de extracción simultánea de mineral a través de múltiples aperturas. Así, los resultados obtenidos serían muy útiles a la hora de optimizar la recuperación del mineral. En general, para el caso de extracción simultánea de material, cuando los flujos no son lineales, se puede realizar un análisis simple suponiendo que, en primera aproximación, es válido el principio de superposición de flujos. De esta forma, la suma de los campos de velocidad, debido a cada apertura aislada, puede ser considerado como una solución del flujo general. En el caso que no exista una ecuación que describa el flujo general, es posible corregir esta primera aproximación sumándole una perturbación. Se debe recordar que, sólo se ha utilizado sistemas con geometría simple, dejando de lado los sistemas de mayor complejidad, como los que se encuentran en la práctica. Por último, es posible caracterizar completamente todo tipo de formas para la zona de descarga, encontradas mediante complejos procedimientos de extracción, ya sea simultáneos o alternados, a través de la caracterización del flujo por una apertura aislada. La información necesaria para validar estos resultados, puede ser obtenida mediante experimentos modelo o bien a través de observaciones detalladas en la mina.

# CONCLUSIONES GENERALES Y PERSPECTIVAS

Los medios granulares han sido estudiados durante mucho tiempo, y sin embargo, aún presentan desafíos muy difíciles para el conocimiento científico. La mayoría de la dificultades encontradas en el estudio de estos materiales, radica en el comportamiento complejo que ellos presentan. Tal como se ha podido apreciar a lo largo de este trabajo, gran parte del comportamiento observado en los medios granulares, se debe a la interacción entre los granos que los componen y a la estructura interna que ellos forman. Por ejemplo, la red de contactos formada al interior de un sistema que fluye, por efecto de la gravedad, es capaz de controlar el flujo de salida, actuando como un mecanismo de disipación. También, la red de contactos es responsable del ascenso discontinuo de los granos de mayor tamaño, observado en la segregación por tamaño, en un sistema granular sometido a vibración. Por otro lado, el carácter discreto de la estructura interna de los medios granulares, hace que las teorías continuas sólo puedan representar, parcialmente, algunas propiedades observadas en los experimentos. Es importante destacar, en este punto, que las simulaciones numéricas han sido un gran aporte en la profundización acerca del comportamiento de los medios granulares. Tal como se ha visto en el Cap. 4, las simulaciones han sido capaces de capturar la mayor parte de los fenómenos encontrados en la segregación. Además, a diferencia de los experimentos, las simulaciones permiten el acceso a todas las propiedades del sistema, lo que permite obtener información no disponible en los experimentos. Sin embargo, es necesario validar los resultados numéricos, mediante la contrastación con los experimentos, para asegurar que las predicciones obtenidas desde las simulaciones tengan un fundamento apropiado. Desde el punto de vista práctico, muchos son los problemas que se pueden encontrar en diferentes procesos industriales. Uno de estos problemas, es la determinación de la zona de descarga aislada, presente en los procesos de extracción mediante la excavación por bloques, utilizada en la minería subterránea. Como hemos visto, los modelos empleados en la determinación de esta zona no tienen un fundamento físico apropiado. Por otro lado, los modelos presentados

en este trabajo, que sí tienen un comportamiento físico apropiado, son capaces de reproducir las zonas de descarga aislada, encontradas en experimentos en sistemas cuasi bidimensionales. En consecuencia, el uso de estos modelos nos permitiría comprender de mejor manera como se distribuye el material al interior de las minas.

Muchos son los aspectos relacionados con los sistemas granulares presentados aquí, que pueden ser considerados en futuros trabajos de investigación. Entre estos podemos mencionar, la extensión de los experimentos del reloj a flujos lentos controlados, considerando el efecto de la rugosidad, la caracterización de la estructura interna de este sistema, mediante el empleo de métodos fotoelásticos combinados con la teoría de la elasticidad, la extensión del estudio, mediante simulaciones numéricas, a sistemas con paredes de geometría diferente a la empleada en este trabajo e incluir dentro de las simulaciones el efecto de la forma de la partículas. Respecto de la segregación por tamaño, una posible extensión, es el estudio en detalle del efecto producido por el tamaño del contenedor. También, se debe considerar la extensión a tres dimensiones del algoritmo para la dinámica de contactos, y su aplicación a los problemas de flujo en un reloj y segregación por tamaño. Con respecto a las aplicaciones en minería, se debe considerar, dentro de trabajos futuros, la incorporación de efectos como la dilatación, en los modelos utilizados en la determinación de la zona de descarga aislada. Otra posible extensión de este caso es, la generalización a $n$ aperturas para una extracción alternada. Considerar, también, la distribución de aperturas en dos dimensiones, de manera de reproducir la geometría encontrada en las minas. Y, además, tomar en cuenta distribuciones de coeficientes de difusión, para modelar la existencia de distintas clases de granos.

# BIBLIOGRAFÍA

[1] R. P. Behringer. The dynamics of flowing sand. *Nonlinear Science Today*, 3, 3, pp. 1–15, 1993.

[2] R. M. Nedderman. *Static and kinematics of granular materials*. Cambridge Univ. Press, December 1992.

[3] T. Shinbrot and F. J. Muzzio. Nonequilibrium patterns in granular mixing and segregation. *Physics Today*, pp. 25–30, March 2000.

[4] E. E. Ehrichs, H. M Jaeger, G. S. Karczmar, J. B. Knight, V. Y. Kuperman, and S. R. Nagel. Granular convection observed by magnetic resonance imaging. *Science*, 267, pp. 1632–1634, March 1995.

[5] H. Hayakawa, S. Yue, and D. C. Hong. Hydrodynamic description of granular convection. *Phys. Rev. Lett.*, 75, 12, pp. 2328–2331, September 1995.

[6] J. B. Knight, H. M. Jaeger, and S. R. Nagel. Vibration-induced size separation in granular media: the convection connection. *Phys. Rev. Lett.*, 70, 24, pp. 3728–3731, June 1993.

[7] L. Mahadevan and Y. Pomeau. Propagating fronts on sand pile. *Europhys. Lett.*, 46, 5, pp. 595–601, June 1999.

[8] A. Samadani, L. Mahadevan, and A. Kudrolli. Shocks in sand flowing in a silo. *arXiv:cond-mat/0110427*, 1, October 2001.

[9] Liu C. −h., Nagel S. R., Schecter A., Coppersmith S. N., Majumdar S., Narayan O., and Witten T. A. Force fluctuations in bead packs. *Science*, 269, pp. 513–515, July 1995.

[10] Coppersmith S. N., Liu C. −h., Majumdar S., Narayan O., and Witten T. A. Model for force fluctuations in bead packs. *Phys. Rev. E*, 53, 5, pp. 4673–4685, May 1996.

[11] P. Claudin, J. −P. Bouchaud, M. E. Cates, and J. P. Wittmer. Models of stress fluctuations in granular media. *Phys. Rev. E*, 57, 4, pp. 4441–4457, April 1998.

[12] J. E. S. Socolar. Average stresses and force fluctuations in noncohesive granular materials. *Phys. Rev. E*, 57, 3, pp. 3204–3215, March 1998.

[13] A. Tkachenko and T. A. Witten. Stress propagation through frictionless granular material. *Phys. Rev. E*, 60, 1, pp. 687–696, July 1999.

[14] U. Marini Bettolo Marconi, A. Petri, and A. Vulpiani. Janssen's law and stress fluctuations in confined dry granular materials. *Physica A*, A 280, pp. 279–288, 2000.

[15] G. Løvoll, K. J. Måløy, and E. G. Flekkøy. Force measurements on static granular materials. *Phys. Rev. E*, 60, 5, pp. 5872–5878, November 1999.

[16] C. −h. Liu and S. R. Nagel. Sound in sand. *Phys. Rev. Lett.*, 68, 15, pp. 2301–2304, April 1992.

[17] C. H. Liu and S. R. Nagel. Sound in a granular material: Disorder and nonlinearity. *Phys. Rev. B*, 48, pp. 15646, 1993.

[18] C. −h. Liu. Spatial patterns of sound propagation in sand. *Phys. Rev. B*, 50, 2, pp. 782–794, July 1994.

[19] J. P. Bouchaud. Stress distribution in granular media and nonlinear wave equation. *J. Phys. I France.*, 5, pp. 639–656, 1995.

[20] R. M. Nedderman, U. Tüzün, S. B. Savage, and G. T. Houlsby. The flow of granular materials−i. *Chemical Engineering Science*, 37, 11, pp. 1597–1609, 1982.

[21] U. Tüzün, G. T. Houlsby, R. M. Nedderman, and S. B. Savage. The flow of granular materials−ii. *Chemical Engineering Science*, 37, 12, pp. 1691–1709, 1982.

[22] S. B. Savage, R. M. Nedderman, U. Tüzün, and G. T. Houlsby. The flow of granular materials−iii. *Chemical Engineering Science*, 38, 2, pp. 189–195, 1983.

[23] P. K. Haff. Grain flow as a fluid-mechanical phenomenon. *J. Fluid Mech.*, 134, pp. 401–430, 1983.

[24] C. Laroche, S. Douady, and S. Fauve. Convective flow of granular masses under vertical vibrations. *J. Phys. (Paris)*, 50, pp. 699–706, 1989.

[25] A. Rosato, K. J. Strandburg, F. Prinz, and R. H. Swendsen. Why the brazil nuts are on top: size segregation of particulate matter by shaking. *Phys. Rev. Lett.*, 58, 10, pp. 1038–1040, March 1987.

[26] O. Zik, D. Levine, S. G. Lipson, S. Shtrikman, and J. Stavans. Rotationally induced segregation of granular materials. *Phys. Rev. Lett.*, 73, 5, pp. 644–647, August 1994.

[27] H. A. Makse, S. Havlin, P. R. King, and H. E. Stanley. Spontaneous stratification in granular mixtures. *arXiv:cond-mat/9809432*, 1, September 1998.

[28] W. A. Beverloo, H. A. Leniger, and J. van de Velde. The flow of granular solids through orifices. *Chemical Engineering Science*, 15, pp. 260–269, 1961.

[29] H. M. Jaeger, S. R. Nagel, and R. P. Behringer. Granular solids, liquids, and gases. *Rev. Mod. Phys.*, 68, 4, pp. 1259–1273, October 1996.

[30] D. Howell, R. P. Behringer, and C. Veje. Stress fluctuations in a 2d granular couette experiment: a continuous transition. *Phys. Rev. Lett.*, 82, 26, pp. 5241, June 1999.

[31] R. M. Nedderman and U. Tüzün. A kinematic model for the flow of granular material. *Powder Technol*, 22, pp. 243–253, 1979.

[32] J. T. Jenkins and S. B. Savage. A theory for the rapid flow of identical, smooth, nearly elastic, spherical particles. *J. Fluid Mech.*, 130, pp. 187–202, 1983.

[33] C. K. K. Lun, S. B. Savage, D. J. Jeffrey, and N. Chepurniy. Kinetic theories for granular flow: inelastic particles in couette flow and slightly inelastic particles in a general flowfield. *J. Fluid Mech.*, 140, pp. 223–256, 1984.

[34] M. Farrel, C. K. K. Lun, and S. B. Savage. A simple kinetic theory for granular flow of binary mixtures of smooth, inelastic, spherical particles. *Acta Mechanica*, 63, pp. 45–60, 1986.

[35] J. P. Bouchaud, M. E. Cates, J. R. Prakash, and S. F. Edwards. A model for the dynamics of sandpile surface. *J. Phys. I France*, 4, pp. 1383–1410, October 1994.

[36] T. Boutreux and P. G. de Gennes. Surface flows of granular mixtures: I. general principles and minimal model. *J. Phys. I France*, 6, pp. 1295–1304, October 1996.

[37] V. M. Kenkre, M. R. Endicott, S. J. Glass, and A. J. Hurd. A theoretical model for compaction of granular materials. *J. Am. Ceram. Soc.*, 79, 12, pp. 3045–3054, 1996.

[38] I. S. Aranson and L. S. Tsimring. Continuum description of avalanches in granular media. *Phys. Rev. E*, 64, 2, pp. 020301–1, 2001.

[39] K. Kroy, G. Sauermann, and H. J. Herrmann. Minimal model for sand dunes. *Phys. Rev. Lett.*, 88, 5, pp. 054301–1, February 2002.

[40] P. A. Cundall and O. D. L. Strack. A discrete model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29, pp. 47–65, 1979.

[41] W. Baxter and R. P. Behringer. Cellular automata models for granular flow. *Phys. Rev. A*, 42, 2, pp. 1017–1020, 1990.

[42] H. Caram and D. C. Hong. Random-walk approach to granular flows. *Phys. Rev. Lett.*, 67, pp. 828–831, 1991.

[43] P. A. Cundall. A computer model for simulating progressive, large-scale movements in blocky rock systems. In *Proc. Symp. Int. Rock Mech.*, volume 2, 1971.

[44] F. Radjai, M. Jean, J. Moreau, and S Roux. Force distributions in dense two-dimensional granular systems. *Phys. Rev. Lett.*, 77, pp. 274–277, 1996.

[45] F. Radjai. Multicontact dynamics. In H. J. Hermann, J. P. Hovi, and S. Luding, editors, *Physics of Dry Granular Media*, NATO ASI Series, pp. 305–311. Kluwer Dordrecht, 1997.

[46] H. J. Herrmann and S. Luding. Review article: modeling granular media on the computer. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 10, 4, pp. 189–231, 1998.

[47] M. Sawley and P. W. Cleary. A parallel discrete element method for industrial granular flow simulations. *EPFL Supercomputing Review*, pp. 23–29, November 1999.

[48] J. Duran, T. Mazozi, E. Clément, and J. Rajchenbach. Size segregation in a two-dimensional sandpile: Convection and arching effects. *Phys. Rev. E*, Vol. 50, pp. 5138–5141, 1994.

[49] J. Moreau and M. Jean. Numerical treatment of contact and friction: the contact dynamics method. *Proc. 3rd Biennial European Joint Conference on Engineering Systems Design and Analysis*, July 1996. Montepellier France.

[50] M. Jean, V. Acary, and Y. Monerie. Non smooth contact dynamics approach of cohesive materials. *Philosophical Transaction: Mathematical, Physical & Engineering Sciences (The Royal Society)*, 359, 1789, pp. 2497–2518, 2001.

[51] Louis Moresi, Hans Mühlhaus, and Frédéric Dufour. An overview of numerical methods for earth simulations. In *An AGU Chapman Conference on Applications of Geodynamics Modeling to Geology... What has the mantle been doing to the crust?*, pp. 19–24. Exploration Geodynamics, Western Australia, 2001.

[52] P. J. Arnoux, J. Bonnoit, P. Chabrand, M. Jean, and M. Pithioux. Numerical damage models using a structured approach: applications in bones and ligaments. *Eur. Phys. J. AP*, Vol. 17, pp. 65–73, 2002.

[53] A. Károly and J. Kertész. Hydrodynamic cellular automata for granular media. In R. Gruber and M. Tomassini, editors, *Proc. 6th Joint EPS-APS Int. Conf. of Phys. Comp.*, Geneva. EPS, 1994.

[54] D. Désérable and J. Martinez. Using cellular automaton for the simulation of flow of granular media. In C. Thornton, editor, *Powders & Grains 93*. Balkema, Rotterdam, 1993.

[55] Rosato AD and Lan Y. Discrete element modeling of vibrated granular beds. In Thorton C, editor, *Powder & Grains 93*, pp. 241, 1993.

[56] Gallas J., Hermann HJ, and Sokolowski SS. Molecular dynamics simulation of size segregation in three dimensions. *J. Stat. Phys*, , 82, pp. 443, 1992.

[57] Hong DC and McLennan. Molecular dynamics simulations of hard sphere granular particles. *Physica A*, , 187, pp. 159, 1992.

[58] D. C. Rapaport. The event scheduling problem in molecular dynamic simulation. *J. Comp. Phys.*, 34, pp. 184, 1980.

[59] M. Marin, D. Risso, and P. Cordero. Efficient algorithms for many-body hard particle molecular dynamics. *J. Comp. Phys.*, 109, pp. 306, 1993.

[60] Allen MP and Tildesley DJ. *Computer simulation of liquids*. Oxford University Press, Oxford, 1987.

[61] Lubachevsky BD. How to simulate billards and similar systems. *J. of comp. Phys.*, Vol. 94, 2, pp. 255, 1991.

[62] G. A. Bird. *Molecular dynamics and the direct simulation of gas flow*. Oxford Science Publications, Oxford, 1994.

[63] Tanaka T, Yonemura S, Yashi KK, and Tsuji Y. Cluster formation and particle-induced instability in gas-solid flows predicted by the dsmc method. *JSME Int. Journal B*, Vol. 39, 2, pp. 239–245, 1996.

[64] Müller M, Luding S, and Herrmann HJ. Simulations of vibrated granular media in 2d and 3d. In Grassberger P, editor, *Friction, arching and contact dynamics*. World Scientific, 1997.

[65] M. S. Müller. *Fast algorithms for the simulation of granular particles*. PhD thesis, Fakultät Physik der Universität Stuttgart, Rechenzentrum Universität Stuttgart, Allmandring 30, 70550 Stuttgart, 2001.

[66] J. S. Langer. pp. 164–186. World Scientific, Philadelphia, 1986.

[67] J. T. Jenkins and F. Mancini. Balance laws and constitutive relations for plane flows of a dense, binary mixture of smooth, nearly elastic circular disks. *J. Appl. Mech.*, Vol. 54, pp. 23–34, 1987.

[68] Savage SB. Problems in the statics and dynamics of granular materials. In Behringer RP and Jenkins JT, editors, *Powder & Grains 97*, pp. 185–194, 1997.

[69] C. S. Desai and J. C. J.F. Abel. *Introduction to the Finite Element Method*. Van Nostrand Reinhold, New York, 1972.

[70] A. J. Davies. *The Finite Element Method: a First Approach*. Oxford, New York, 1980.

[71] H. Koenig. *Modern Computational Methods*. Series in Computational Methods and Physical Processes in Mechanics and Thermal Sciences. Taylor & Francis, 1 edition edition, 1998.

[72] Goldshtein A. and Shapiro M. Mechanics of collisional motion of granular materials. part i. general hydrodynamic equations. *J. Fluid Mech.*, 282, pp. 75–114, 1995.

[73] J. Alonso and H. J. Herrmann. Shape of the tail of a two-dimensional sandpile. *Phys. Rev. Lett.*, 76, 26, pp. 4911–4914, 1996.

[74] G. Peng and H. J. Herrmann. Density waves of granular flow in a pipe using lattice-gas automata. *Phys. Rev. E*, 49, 3, pp. 1796, 1994.

[75] W. Baxter and R. P. Behringer. Cellular automata models for the flow of granular materials. 51, pp. 465, 1991.

[76] S. Vollmar and H. J. Herrmann. Settling of particles studied by a hydrodynamic cellular automaton for granular media. *Physica D*, 215, pp. 411–419, 1995.

[77] Flekkøy E.G. and Herrmann H.J. Lattice boltzmann models for complex fluids. *Physica D*, 199, pp. 1, 1993.

[78] W. H. Press, H. A. Teukolsky, V. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge, UK, 1994.

[79] O. Zik, J. Stavans, and Y. Rabin. Mobility of a sphere in vibrated granular media. *Europhys. Lett.*, 17, pp. 315–319, 1992.

[80] J. Duran, J. Rajchenbach, and E. Clément. Arching effect model for particle size segregation. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 70, pp. 2431–2434, 1993.

[81] R. A. Bagnold. Experiment on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a newtonian fluid under shear. *Proc. R. Soc. London*, A 225, 49, 1954.

[82] F. Zandman, S. Redner, and J. W. Dally. *Photoelastic coatings SESA monograph No 3*. Science Press, 1977.

[83] S. F. Edwards and C. C. Mounfield. A theoretical model for the stress distribution in a granular matter. i. basic equations. *Physica A*, 226, pp. 1–11, 1996.

[84] C. C. Mounfield and S. F. Edwards. A theoretical model for the stress distribution in a granular matter. ii. forces in pipes. *Physica A*, 226, pp. 12–24, 1996.

[85] S. F. Edwards and C. C. Mounfield. A theoretical model for the stress distribution in a granular matter. iii. forces in sandpiles. *Physica A*, 226, pp. 25–33, 1996.

[86] A. Drescher and G. de Josselin de Jong. Photoelastic verification of a mechanical model for the flow of a granular material. *J. Mech. Phys. Solids*, 20, pp. 337–351, 1972.

[87] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Mecánica de Fluidos volumen* $6$ *del curso de física teórica*. Editorial Reverté, Loreto, $13-15$, Local B, 08029 Barcelona, 1991.

[88] L. A. Segel. *Mathematics applied to continuum mechanics*. General Publishing Company, 30 Lesmill Road, Don Mills, Toronto, Ontario, 1987.

[89] A. Sáez, F. Vivanco, and F. Melo. Size segregation, convection and arching effect. *Phys. Rev. E*, 72, pp. 021307, 2005.

[90] D. Huerta and J. Ruiz-Suárez. Vibration-induced granular segregation: A phenomenon driven by three mechanisms. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 92, pp. 114301, 2004.

[91] L. Vanel, A. Rosato, and R. Dave. Rise-time regimes of a large sphere in vibrated bulk solids. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 78, pp. 1255–1258, 1997.

[92] J. C. Williams. The segregation of particulate materials. a review. *Powder Technol*, Vol. 15, pp. 245–251, 1976.

[93] K. Ahmad and I. Smalley. Observation of particle segregation in vibrated granular systems. *Powder Technol*, Vol. 8, pp. 69–75, 1973.

[94] J. Bridgewater. Fundamental powder mixing mechanisms. *Powder Technol*, Vol. 15, pp. 215–236, 1976.

[95] R. Jullien, P. Meakin, and P. Pavlovitch. Three-dimensional model for particle-size segregation by shaking. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 69, pp. 640–643, 1992.

[96] H. M. Jaeger and S. R. Nagel. Physics of the granular state. *Science*, 255, pp. 1523–1531, March 1992.

[97] R. Jullien, P. Meakin, and P. Pavlovitch. Reply. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 70, pp. 2195, 1993.

[98] T. Pöschel and H.J. Herrmann. Size segregation and convection. *Europhys. Lett.*, Vol. 29, pp. 123, 1995.

[99] A. Rustan. *Gravity flow of broken rock – What is known and unknown*, pp. 557–567. The Australasian Institute of Mining and Metallurgy, 2000.

[100] M. E. Kuchta. A revised form of the bergmark-roos equation for describing the gravity flow of broken rock. *Mineral Resource Engineering*, 11, pp. 349–360, 2002.

[101] A. Samadani, A. Pradham, and A. Kudrolli. Size segregation of granular matter in silo discharges. *Phys. Rev. E*, 60, pp. 7203–7209, 1999.

[102] C. Fuentes and V. Apablaza. Bi-dimensional experimentation on gravitational flow for underground chuquicamata. Technical report, IM2, Codelco-Chile, 2003.

[103] W. W. Mullins. Experimental evidence for the stochastic theory of particle flow under gravity. *Powder Technol*, 9, pp. 29–37, 1976.

[104] Litwiniszyn. The model of a random walk of particles adopted to researches on problems of mechanics of granular. *Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Tech.*, 9, pp. 61, 1963.

[105] P. L. Bransby and P. M. Blair-Fish. Initial deformations during mass flow from a bunker: observation and idealizations. *Powder Technol*, 11, pp. 273–288, 1975.

[106] F. Melo, F. Vivanco, C. Fuentes, and V. Apablaza. Draft report on quasi static granular flows: dilatancy effects. Technical report, IM2, Codelco-Chile, 2005.

# APÉNDICE A: ECUACIONES DE TRANSFERENCIA

El detalle de la obtención de las ecuaciones de transferencia utilizadas en el método de la dinámica de contactos, ver Sec. 2.2.3, es presentado en este apéndice.

Supongamos que, las partículas $i$ y $j$ están en contacto entre sí y además, que interactúan con otras partículas, tal como se muestra en la Fig. A.1.

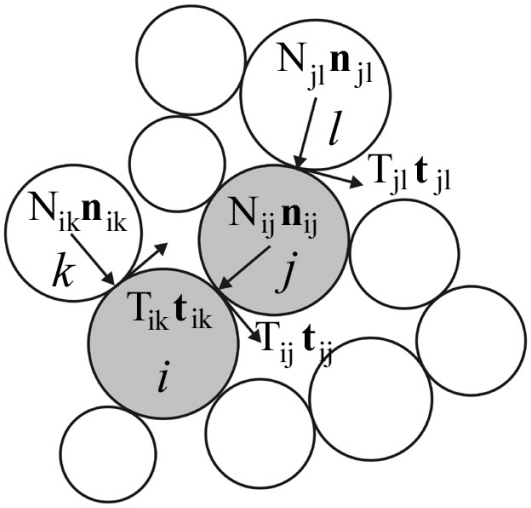


Figura A.1. Sistema de partículas con múltiples contactos.

Proyectando las ecuaciones de conservación para el momentum lineal de las partículas $i$ y $j$ en la dirección $\hat{n}_{ij}$, se tiene

$$m_i(v_i^{n+} - v_i^{n-}) = R_{ij}^n + \sum_{k \neq j} \left( \vec{R}_{ik}^n + \vec{R}_{ik}^t \right) \cdot \hat{n}_{ij} \tag{A.1}$$

$$m_j(v_j^{n+} - v_j^{n-}) = -R_{ij}^n + \sum_{l \neq i} \left( \vec{R}_{jl}^n + \vec{R}_{jl}^t \right) \cdot \hat{n}_{ij}. \tag{A.2}$$

Restando ambas ecuaciones se obtiene

$$\begin{aligned}(v_i^{n+} - v_i^{n-}) - (v_j^{n+} - v_j^{n-}) &= \left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}\right) N_{ij} + \frac{1}{m_i}\sum_{k\neq j}\left(\vec{R}_{ik}^n + \vec{R}_{ik}^t\right)\cdot\hat{n}_{ij} \\ &\quad - \frac{1}{m_j}\sum_{l\neq i}\left(\vec{R}_{jl}^n + \vec{R}_{jl}^t\right)\cdot\hat{n}_{ij}. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Luego, introduciendo las velocidades 2.1 y 2.2

$$\overline{v}_i^n = \frac{1}{1+\rho_n} v_i^{n+} + \frac{\rho_n}{1+\rho_n} v_i^{n-} \tag{A.4}$$

$$\overline{v}_i^t = \frac{1}{1+\rho_t} v_i^{t+} + \frac{\rho_t}{1+\rho_t} v_i^{t-}, \tag{A.5}$$

y despejando $R_{ij}^n$ se tiene

$$R_{ij}^n = m_{ij}^n (1+\rho_n)\overline{v}_{ij}^n + A_{ij}^n, \tag{A.6}$$

donde

$$\frac{1}{m_{ij}^n} \equiv \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} \tag{A.7}$$

$$\overline{v}_{ij}^n \equiv \overline{v}_i^n - \overline{v}_j^n \tag{A.8}$$

$$A_{ij}^n \equiv K_{ij}^n - (1+\rho_n) v_{ij}^{n-} \tag{A.9}$$

$$K_{ij}^n \equiv -\frac{m_{ij}^n}{m_i}\sum_{k\neq j}\left(\vec{R}_{ik}^n + \vec{R}_{ik}^t\right)\cdot\hat{n}_{ij} + \frac{m_{ij}^n}{m_j}\sum_{l\neq i}\left(\vec{R}_{jl}^n + \vec{R}_{jl}^t\right)\cdot\hat{n}_{ij}. \tag{A.10}$$

Procediendo de manera análoga, esta vez proyectando el momentum lineal y el angular en la dirección $\hat{t}_{ij}$ se tiene

$$\begin{aligned}(v_i^{t+} - v_i^{t-} - r_i\omega_i) &= \frac{1}{m_i} R_{ij}^t + \frac{1}{m_i}\sum_{k\neq j}\left(\vec{R}_{ik}^n + \vec{R}_{ik}^t\right)\cdot\hat{t}_{ij} \\ &\quad + \frac{r_i^2}{I_i} R_{ij}^t + \frac{1}{I_i}\sum_{k\neq j} r_i^2 \vec{R}_{ik}^t\cdot\hat{t}_{ij} \end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}(v_j^{t+} - v_j^{t-} + r_j\omega_j) &= -\frac{1}{m_j} R_{ij}^t + \frac{1}{m_j}\sum_{l\neq i}\left(\vec{R}_{jl}^n + \vec{R}_{jl}^t\right)\cdot\hat{t}_{ij} \\ &\quad + \frac{r_j^2}{I_j} R_{ij}^t + \frac{1}{I_j}\sum_{l\neq i} r_i^2 \vec{R}_{jl}^t\cdot\hat{t}_{ij}. \end{aligned} \tag{A.12}$$

Introduciendo las Ecs. 2.1 y 2.2 y despejando $R^t_{ij}$ se obtiene

$$R^t_{ij} = m^t_{ij}(1+\rho_t)\overline{v}^t_{ij} + A^t_{ij}, \tag{A.13}$$

donde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m^t_{ij}} &\equiv \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} + \frac{r_i^2}{I_i} + \frac{r_j^2}{I_i} && \text{(A.14)}\\
\overline{v}^t_{ij} &\equiv v^t_i - v^t_j - (r_i\omega_i + r_j\omega_j) && \text{(A.15)}\\
\omega &\equiv \omega^+ - \omega^- && \text{(A.16)}\\
A^t_{ij} &\equiv K^t_{ij} - m^t_{ij}(1+\rho_t)v^{t-}_{ij} && \text{(A.17)}\\
K^t_{ij} &\equiv -\frac{m^t_{ij}}{m_i}\sum_{k\neq j}\left(\vec{R}^n_{ik} + \vec{R}^t_{ik}\right)\cdot\hat{t}_{ij}\\
&\quad + \sum_{l\neq i}\left(\vec{R}^n_{jl} + \vec{R}^t_{jl}\right)\cdot\hat{t}_{ij}\\
&\quad + \frac{r_i^2}{I_i}\sum_{k\neq j} S_{ik} + \frac{r_j^2}{I_j}\sum_{l\neq i} S_{jl} && \text{(A.18)}\\
S_{ik} &\equiv -m^t_{ij}R^t_{ik} && \text{(A.19)}\\
S_{jl} &\equiv -m^t_{ij}R^t_{jl}. && \text{(A.20)}
\end{aligned}$$

# APÉNDICE B: MODELO CINEMÁTICO

La forma usual de predecir, teóricamente, la distribución de velocidades en los medios granulares, es por medio de la teoría de plasticidad. Esto implica obtener, en primer lugar, la distribución de esfuerzos en el material en estado estático y, a través de ésta, la distribución de velocidades. Sin embargo, los análisis de esfuerzos realizados sobre material granular, en silos convergentes, muestran que estos campos presentan una gran cantidad de discontinuidades, las que no se ven reflejadas en el comportamiento de los campos de velocidades obtenidos en forma experimental. Claramente, es casi imposible la obtención de un campo de velocidades continuo a partir de un campo de esfuerzos discontinuo. Con el fin de evitar este problema, se han introducido algunos modelos basados en procesos estocásticos, obteniéndose el campo de velocidades en forma independiente del campo de esfuerzos, ver por ejemplo [103, 104]. Por otro lado, Nedderman y Tüzün [31] han propuesto un modelo alternativo, conocido como *modelo cinemático*, que al igual que los anteriores, determina el campo de velocidades en forma independiente del campo de esfuerzos y que, además, no hace referencia a procesos estocásticos. Este modelo supone que, las partículas ubicadas en la proximidad de la apertura caen libremente y que el espacio dejado por éstas, es ocupado por las partículas situadas en la capa inmediatamente superior, repitiéndose este proceso capa por capa hasta alcanzar la altura del sistema. Con esto, el modelo supone que, el deslizamiento de las partículas es provocado sólo por el peso de éstas, sin verse afectado por los gradientes de los esfuerzos. Bajo estas suposiciones, es claro que, el deslizamiento tenderá a producirse en la dirección de las partículas que caen más rápidamente. Entonces, es factible suponer que la velocidad horizontal $\vec{u}$, es una función del gradiente horizontal de la velocidad vertical $\vec{v}$. Con esto, se tiene que, en dos dimensiones, la forma más simple para la velocidad $u$ está dada por

$$u = -D\frac{\partial v}{\partial x} \tag{B.1}$$

donde $D$ es una constante denominada constante cinemática. Considerando que, los cambios en la densidad, producto del proceso de deslizamiento de las partículas, son pequeños, se puede suponer que el sistema es incompresible. En consecuencia, introduciendo B.1 en la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{B.2}$$

se obtiene

$$\frac{\partial v}{\partial y} = D\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \tag{B.3}$$

De esta forma, la velocidad vertical $u$, está determinada por una ecuación de difusión y su forma específica dependerá de las condiciones de borde e inicial. Trabajos recientes han confirmado la predicción de las líneas de corriente obtenidas con el modelo cinemático [31,42,101], bajo condiciones de flujo estacionario y material dilatado. En cambio, si el material se encuentra compactado, el modelo deja de describir correctamente el sistema [105], debido a la dilatación que se produce en la superficie donde se genera la ruptura del material, cuando éste comienza a fluir. El frente de dilatación generado se propaga hacia arriba, aumentando el error en la determinación del desplazamiento de las partículas predicho por este modelo [102,106]. Siendo, este efecto, más grande mientras mayor es la altura.